

**SIMULTANEOUS OPTIMIZATION OF MEAN AND STANDARD DEVIATION IN RESPONSE SURFACE EXPERIMENTATION**

Onur Köksoy\*, Niğde University, Niğde, Turkey

Necip Doganaksoy\*\*, GE Global Research Center,  
Schenectady, NY, USAManuscript received October 18, 2002, "To appear in  
Journal of Quality Technology (2003)"**Component:** Information and Decision Technologies,  
Niskayuna**Number of Pages:** 25**Class:** 1**ABSTRACT**

Taguchi's robust parameter design calls for simultaneous optimization of the mean and standard deviation responses. The dual response optimization procedures have been adapted to achieve this goal by taking into account both the mean and standard deviation response functions. The popular formulations of the dual response problem typically impose a restriction on the value of the secondary response (i.e., keeping the standard deviation below a specified value) and optimize the primary response function (i.e., maximize or minimize the mean). Restrictions on the secondary response, however, may rule out better conditions since an acceptable value for the secondary response is normally unknown – in fact, process conditions that result in a smaller standard deviation are often preferable. A more flexible formulation of the problem would be accomplished by considering the secondary response as another primary response. The proposed method will generate more alternative solutions, called Pareto optimal solutions. This gives more flexibility to the decision-maker in exploring alternative solutions. It is also insightful to examine graphically how the controllable variables simultaneously impact the mean and standard deviation. The procedure is illustrated by three examples using both the NIMBUS software for nonlinear multiobjective programming and the Solver in the Excel spreadsheet.

**KEY WORDS:** Compromise Solutions; Dual Response Optimization; Quality Improvement; Response Surface Methodology; Taguchi's Robust Parameter Design.**OPTIMIZACIÓN SIMULTÁNEA DE MEDIA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR EN EXPERIMENTACIÓN DE SUPERFICIE DE RESPUESTA**Onur Köksoy, Universidad de Nigde, Nigde Turquía  
Necip Doganaksoy, Centro de Investigaciones Globales GE, Schenectady, NY, USA

El Manuscrito se recibió el 18 de Octubre de 2002, "Para aparecer en el Journal of Quality Technology, Vol 35, No. 3, Julio 2003"

**Componente:** Tecnologías de la Información y Decisión, Niskayuna**Número de Páginas:** 25**Clase:** 1Traducción académica de Luis Omar Jamed<sup>1</sup> Boza, Fac.de Ing. Química y Ambiental, UV, Xalapa Ver. México**RESUMEN**

El diseño de parámetro robusto de Taguchi invoca la optimización simultánea de las respuestas de la media y de la desviación estándar. Los procedimientos de optimización de respuesta dual han sido adaptados para lograr esta meta teniendo en cuenta las funciones de respuestas de la media y de la desviación estándar. Las formulaciones populares del problema de respuesta dual típicamente imponen una restricción en el valor de la respuesta secundaria (por ejemplo, manteniendo la desviación estándar bajo un valor específico) y optimizar la función de respuesta primaria (por ejemplo, maximizar o minimizar la media). Las restricciones sobre la respuesta secundaria, sin embargo, gobernarían fuera de las mejores condiciones ya que un valor aceptable para la respuesta secundaria es - de hecho, desconocido normalmente, las condiciones del proceso que resultan en una desviación estándar pequeña a menudo es preferible. Se logaría una formulación más flexible del problema considerando la respuesta secundaria como otra respuesta primaria. El método propuesto generará más soluciones alternativas, llamadas soluciones óptimas Pareto. Éste da más flexibilidad a la toma de decisiones en la exploración de soluciones alternativas. Es también profundo examinar gráficamente cómo las variables controlables impactan simultáneamente la media y la desviación estándar. El procedimiento es ilustrado por tres ejemplos usando el software NIMBUS para la programación multiobjetivo no lineal y el Solver en la hoja de cálculo Excel.

**PALABRAS CLAVE:** Diseño de Parámetro Robusto de Taguchi; Mejora de la Calidad; Metodología de Superficie de Respuesta; Optimización de Respuesta Dual; Soluciones de Compromiso.

---

\* Dr. Köksoy is an Assistant Professor in the Mathematics Department (e-mail: [okoksoy@nigde.edu.tr](mailto:okoksoy@nigde.edu.tr)), Phone (518)387-5319, Nigde University, Turkey

\*\* Dr. Doganaksoy is a Statistician in the Applied Statistics Laboratory (e-mail: [doganaksoy@crd.ge.com](mailto:doganaksoy@crd.ge.com)). He is a Member of ASQ. Phone 8\*833-5319

## **Introduction**

Many problems in statistical quality improvement, including the dual response system (DRS) problems, involve the application of optimization methods. Carlyle, Montgomery and Runger (2000) give an overview of optimization problems that arise in statistics and quality. The recent push for quality improvement in industry has brought response surface methodology (RSM) to the attention of many users (Khuri, 1996). In the 1990s much attention was given to the optimization of DRS as an important RSM tool for quality improvement. In our context, the dual response refers to the mean and the standard deviation of the process. In the spirit of Taguchi's robust parameter design (RPD) one should simultaneously examine and optimize the mean and standard deviation responses.

Vining and Myers (1990) and Myers, Khuri, and Vining (1992) provided RSM alternatives to the Taguchi's RPD approach. Following these articles, several formulations and procedures have been proposed for the DRS problem; see, for example, Del Castillo and Montgomery (1993) and Lin and Tu (1995). The popular formulations of the DRS problem seek to achieve a unique optimum solution by placing appropriate constraints on the response variables. For example, a common practice is to optimize the mean, subject to keeping the standard deviation below a specified value. While this is useful in cases where a "one-shot" optimum solution is feasible, the existing approaches do not readily lend themselves for exploratory analysis of the trade-offs between the mean and standard deviation responses. We believe that such analysis is useful and is required in order to achieve an improved understanding of the problem before one could search for a final optimal solution. This paper aims to fill this gap by offering a highly flexible formulation (i.e., minimally constrained) of the DRS problem in order to help the analyst gain useful insight into the problem. We utilize standard nonlinear multiobjective programming techniques, specifically the NIMBUS (Nondifferentiable Interactive Multiobjective BUndle-based Optimization System) algorithm (Miettinen, 1999, 195-207), to obtain simultaneous solutions to the mean and standard deviation response functions. We also illustrate the use of the Solver in the Excel spreadsheet to obtain simultaneous solutions.

## **Introducción**

Muchos problemas en la mejora de la calidad estadística, incluyen problemas del sistema de respuesta dual (DRS), estos involucran la aplicación de métodos de optimización. Carlyle, Montgomery y Runger (2000) dan una apreciación global de los problemas de optimización que surgen en estadística y en calidad. El empuje reciente para la mejora de la calidad en la industria ha atraído la atención de muchos usuarios a la metodología de superficie de respuesta (RSM) (Khuri, 1996). En los años noventa se prestó mucha atención a la optimización del DRS como una herramienta de la RSM importante para la mejora de la calidad. En nuestro contexto, la respuesta dual se refiere a la media y a la desviación estándar del proceso. En el espíritu del diseño de parámetro robusto de Taguchi (RPD) uno debe examinar y optimizar simultáneamente las respuestas de la media y desviación estándar.

Vining y Myers (1990); Myers, Khuri, y Vining (1992) proporcionan alternativas de la RSM al acercamiento del RPD de Taguchi. Siguiendo estos artículos, varias formulaciones y procedimientos se han propuesto para el problema del DRS; por ejemplo, ver Del Castillo y Montgomery (1993); Lin y Tu (1995). Las formulaciones populares del problema del DRS buscan lograr una única solución óptima colocando restricciones adecuadas en las variables respuesta. Por ejemplo, una práctica común es optimizar la media, sujeta a mantener la desviación estándar por debajo de un valor especificado. Mientras esto es útil en los casos dónde la solución óptima es factible en "un solo tiro", los acercamientos existentes en sí mismos no son adecuados para el análisis exploratorio de los intercambios entre las respuestas de la media y desviación estándar. Creemos que tal análisis es útil y es requerido para lograr un entendimiento mejor del problema antes de buscar una solución óptima final. Este trabajo tiende a llenar ese hueco ofreciendo una formulación muy flexible (es decir, restringido en su forma mínima) del problema del DRS que ayuda al analista para ganar la visión útil en el problema. Utilizamos técnicas de programación de multiobjetivo no lineal estándar, específicamente el algoritmo NIMBUS (Sistema de Optimización basado en paquete Interactivo Multiobjetivo No Diferenciable) (Miettinen, 1999, 195-207), para obtener las soluciones simultáneas a las funciones de respuesta de la media y desviación estándar. También ilustramos el uso del Solver en la hoja de cálculo del Excel para obtener las soluciones simultáneas.

## Abbreviations

DRS	Dual Response System
GRG	Generalized Reduced Gradient
MSE	Mean Square Error
NIMBUS	Nondifferentiable Interactive Multiobjective BUNDLE-based Optimization System
RPD	Robust Parameter Design
RSM	Response Surface Methodology

The rest of the paper is organized as follows: The next section presents an overview of the DRS problem. We then briefly review the past approaches to address the problem. The following section describe the proposed formulation of the DRS problem and the procedure for simultaneous optimization of the mean and standard deviation response functions. This is followed by three numerical examples that illustrate the proposed approach. The paper concludes with a summary. The uses of the NIMBUS software and the Solver in the Excel spreadsheet to implement the proposed approach are given in the Appendix.

## Review of the Dual Response Problem

The RPD problem is a special case of the multiple response problem where two responses, the mean and the standard deviation of the characteristic of interest ( $y$ ), are measured simultaneously for each setting of a group of design or control variables ( $x$ 's) during the experiment. Let  $\hat{\mu}$  and  $\hat{\sigma}$  denote the fitted response surfaces for the process mean and the standard deviation respectively. In most RPD applications, both  $\hat{\mu}$  and  $\hat{\sigma}$  (or sometimes  $\log(\hat{\sigma})$ ) are assumed to be second-order models of the form

$$\hat{\mu} = b_0 + \mathbf{x}'\mathbf{b} + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} \quad (1)$$

$$\hat{\sigma} = c_0 + \mathbf{x}'\mathbf{c} + \mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2)$$

where  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  are  $k \times k$  matrices containing the estimated coefficients of the second-order terms of each response model,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$  are  $k \times 1$  vectors containing the estimated coefficients of the first-order terms of each response model,  $b_0$  and  $c_0$  are scalars, and  $\mathbf{x}$  is a  $k \times 1$  vector of control or design variables. Myers and Montgomery (1995) provides detailed discussion on experimental design considerations for estimating models (1) and (2).

## Abreviaciones

DRS	Sistema de Respuesta Dual
GRG	Gradiente Reducido Generalizado
MSE	Error Cuadrado Medio
NIMBUS	Sistema de Optimización basado en paquete Interactivo Multiobjetivo No Diferenciable
RPD	Diseño de Parámetro Robusto
RSM	Metodología de Superficie de Respuesta

El resto del trabajo está organizado como sigue: La sección próxima presenta una visión global del problema del DRS. Nosotros entonces revisamos brevemente los acercamientos pasados para dirigir el problema. La sección siguiente describe la formulación propuesta del problema del DRS y el procedimiento para la optimización simultánea de las funciones de respuesta de la media y desviación estándar. Es seguido por tres ejemplos numéricos que ilustran el acercamiento propuesto. El trabajo concluye con un resumen. Son dados en el Apéndice, los usos del software NIMBUS y el Solver en la hoja de cálculo del Excel para llevar a cabo el acercamiento propuesto.

## Revisión del Problema de Respuesta Dual

El problema del RPD es un caso especial del problema de respuesta múltiple donde dos respuestas, la media y la desviación estándar de la característica de interés ( $y$ ), son medidas simultáneamente para cada fijación de un grupo de variables de diseño o control ( $x$ 's) durante el experimento. Sean denotadas por  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  las superficies de respuesta fijadas para la media y la desviación estándar del proceso respectivamente. En la mayoría de las aplicaciones del RPD, la  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  (o algunas veces  $\log(\hat{\sigma})$ ) se asumen ambas ser modelos de segundo orden de la forma

$$\hat{\mu} = b_0 + \mathbf{x}'\mathbf{b} + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} \quad (1)$$

$$\hat{\sigma} = c_0 + \mathbf{x}'\mathbf{c} + \mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son matrices  $k \times k$  conteniendo los términos de segundo orden de los coeficientes estimados de cada modelo de respuesta,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  son vectores  $k \times 1$  conteniendo los términos de primer orden de los coeficientes estimados de cada modelo,  $b_0$  y  $c_0$  son escalares, y  $\mathbf{x}$  es un vector  $k \times 1$  de variables de control o diseño. Myers y Montgomery (1995) proporcionan la discusión detallada sobre las consideraciones del diseño experimental para la estimación de los modelos (1) y (2).

Even though the remainder of the paper will focus on the type of response surface functions (1) and (2), the proposed approach does not assume any specified form for these. Furthermore, the response surface for standard deviation could be obtained by using any of the available approaches (i.e., pure replication, combined array, inner-outer array). The formulation of the DRS problem and the optimization procedure of this paper can also be used with response surface functions that involve both control and noise variables. We will use two numerical example to illustrate the latter case (Examples 2 and 3).

Vining and Myers (1990) adapted the DRS approach to the three basic cases of RPD:

“Larger the better”, “smaller the better”, and “target is best”. In their approach, one response is chosen as a primary response to be optimized subject to some specified value of the secondary response. The “larger the better”/ “smaller the better” cases seek the settings of the  $x$ ’s that maximize/minimize  $\hat{\mu}$  (i.e., the primary response) while controlling  $\hat{\sigma}$  (i.e., the secondary response) at some specified value. In the “target is best” case, one is interested in minimizing  $\hat{\sigma}$  (i.e., the primary response) while keeping  $\hat{\mu}$  (i.e., the secondary response) at a specified target value. A solution is found under an additional constraint on the  $x$ ’s such as  $\mathbf{x}'\mathbf{x} = \rho^2$  where  $\rho$  is a radius of spherical region.

The DRS problem has attracted a great deal of interest since its initial formulation by Vining and Myers (1990). The main developments in this area will be reviewed in the next section.

#### **Past Approaches to Formulate the DRS Problem**

Vining and Myers (1990) used an algorithm originally proposed by Myers and Carter (1973) for determining conditions of the design variables that maximize or minimize a primary response function subject to a single equality constraint. Their optimization procedure employs Lagrangian multipliers and is an extension of ridge analysis (Hoerl, 1959 and Draper, 1963). This procedure requires the two response functions to be quadratic and assumes a spherical region of interest. Vining and Myers (1990) noted that their procedure is well suited for the “target is best” case (i.e., minimizing standard deviation while keeping the mean at a specified value). For the “larger the better” and “smaller the better” cases, an acceptable value for the secondary response is normally unknown. Restricting the optimization to equality constraints may very well rule out better conditions. To overcome this issue, in their study of the printing example, Vining and Myers (1990) considered three different desired target values for standard deviation.

Aunque el resto del trabajo se enfocará sobre los tipos de funciones de superficie de respuesta (1) y (2), el acercamiento propuesto no asume alguna forma especificada para éstas. Además, la superficie de respuesta para la desviación estándar podría obtenerse usando cualquiera de los acercamientos disponibles (es decir, replicación pura, arreglo combinado, arreglo interno-externo). La formulación del problema del DRS y el procedimiento de optimización de este trabajo también puede usarse con funciones de superficie de respuesta que involucran variables de control y de ruido. Usaremos dos ejemplos numéricos para ilustrar el último caso (Ejemplos 2 y 3).

Vining y Myers (1990) adaptaron el acercamiento DRS a los tres casos básicos de RPD: “Más grande el mejor”, “más pequeño el mejor”, y “objetivo es mejor”. En su acercamiento, una respuesta es escogida como una respuesta primaria para ser optimizada sujeta a algún valor especificado de la respuesta secundaria. Los casos “más grande el mejor” / “más pequeño el mejor” buscan las fijaciones de las  $x$ ’s que maximizan / minimizan  $\hat{\mu}$  (es decir, la respuesta primaria) controlando  $\hat{\sigma}$  (es decir, la respuesta secundaria) en algún valor especificado. En el caso “objetivo es mejor”, se está interesado en minimizar  $\hat{\sigma}$  (es decir, la respuesta primaria) manteniendo  $\hat{\mu}$  (es decir, la respuesta secundaria) en un valor objetivo especificado. Una solución se encuentra bajo una restricción adicional en las  $x$ ’s tal como  $\mathbf{x}'\mathbf{x} = \rho^2$  donde  $\rho$  es un radio de la región esférica. El problema del DRS ha atraído mucho interés subsecuente a su formulación inicial por Vining y Myers (1990). Los principales desarrollos en esta área serán revisados en la próxima sección.

#### **Acercamientos pasados para formular el problema del DRS**

Vining y Myers (1990) utilizaron un algoritmo propuesto originalmente por Myers y Carter (1973) para determinar las condiciones de las variables de diseño que maximiza o minimiza una función de respuesta primaria sujeta a una sola restricción de igualdad. Su procedimiento de optimización emplea los multiplicadores de Lagrange y es una extensión del análisis de cordillera (Hoerl, 1959 y Draper, 1963). Este procedimiento requiere que las dos funciones respuesta sean cuadráticas y asume una región esférica de interés. Vining y Myers (1990) notaron que su procedimiento satisface para el caso “objetivo es mejor” (es decir, minimizando la desviación estándar y manteniendo la media en un valor especificado). Para los casos “más grande el mejor” y “más pequeño el mejor”, un valor aceptable para la respuesta secundaria es desconocido normalmente. Restringiendo la optimización a las restricciones de igualdad, la regla puede quedar fuera de las condiciones mejores. Para superar este problema, en su estudio del ejemplo de la impresión, Vining y Myers (1990) consideraron tres diferentes valores objetivos deseados para la desviación estándar.

While constraints on the response variables, such as those adapted by Vining and Myers (1990) are needed to be able to obtain a unique optimum solution, they may rule out better solutions. For example, for the “target is best” case the  $\hat{\mu} = T$  constraint ( $T$  is the target value for the mean response) could lead one to miss a more favorable solution from variability perspective. As a remedy, for example, Copeland and Nelson (1996) have suggested  $(\hat{\mu} - T)^2 \leq \Delta^2$  as a more suitable constraint ( $\Delta$  is the user-specified upper limit on deviation of mean response from its target). Similar concerns have been raised for constraints on the standard deviation response. Consequently, much of the recent work in this area has focused on alternative formulations of the DRS problem. In parallel, there has been significant effort towards improving the optimization algorithms used to solve the DRS problem. The main thrust of our paper is the formulation of the DRS problem. The remainder of this section reviews the well known formulations (see Table 1 for a summary). Kim and Lin (1998) provide a highly informative and insightful review of these various approaches and formulations.

Del Castillo and Montgomery (1993) adapted the Generalized Reduced Gradient (GRG) algorithm to solve the DRS problem. This procedure does not require that both functions be complete quadratics. The region constraints could be either cuboidal or spherical. The GRG method permits more general forms of the constraints such as the “in between” constraint for the secondary response. Due to its flexibility, the GRG solution of the DRS problem can sometimes yield better operating conditions within the region of interest than those obtained with the approach of Vining and Myers (1990).

Mientras que las restricciones en las variables respuesta, tales como las que han sido adaptadas por Vining y Myers (1990) son necesarias para poder obtener una solución óptima única, éllas pueden estar fuera de las soluciones mejores. Por ejemplo, para el caso “objetivo es mejor” la restricción  $\hat{\mu} = T$  ( $T$  es el valor objetivo para la respuesta media) podría extraviar una solución más favorable desde la perspectiva de variabilidad. Como un remedio, por ejemplo, Copeland y Nelson (1996) han sugerido  $(\hat{\mu} - T)^2 \leq \Delta^2$  como una restricción más conveniente ( $\Delta$  es el límite superior especificado por el usuario sobre la desviación de la respuesta media a partir de su objetivo). Aspectos similares han sido planteados para las restricciones en la respuesta de la desviación estándar. Por consiguiente, mucho del trabajo reciente en esta área se ha enfocado en las formulaciones alternativas del problema del DRS. En paralelo, ha habido esfuerzo significante hacia la mejora de los algoritmos de optimización utilizados para resolver el problema del DRS. El esfuerzo principal de nuestro trabajo es la formulación del problema del DRS. Lo remanente de esta sección revisa las formulaciones bien conocidas (ver Tabla 1 para un resumen). Kim y Lin (1998) proporcionan una revisión muy informativa y profunda de varios de estos acercamientos y formulaciones.

Del Castillo y Montgomery (1993) adaptaron el algoritmo del Gradiente Reducido Generalizado (GRG) para resolver el problema del DRS. Este procedimiento no requiere que ambas funciones sean cuadráticas completas. Las restricciones de la región podrían ser o cuboidal o esférica. El método del GRG permite formas más generales de las restricciones tal como la restricción de estar “entre” para la respuesta secundaria. Debido a su flexibilidad, la solución del GRG del problema del DRS algunas veces puede rendir buenas condiciones de operación dentro de la región de interés que aquéllas obtenidas con el acercamiento de Vining y Myers (1990).

Reference (Referencia)	Target is Best (Objetivo es Mejor)	Smaller the Better (Más pequeño el mejor)	Larger the Better (Más grande el mejor)
Vining and Myers(1990) Del Castillo and Montgomery(1993)	Minimize $\hat{\sigma}$ Such that $\hat{\mu} = T$	Minimize $\hat{\mu}$ Such that $\hat{\sigma} = \sigma_0$	Maximize $\hat{\mu}$ Such that $\hat{\sigma} = \sigma_0$
Lin and Tu (1995)	Minimize $(\hat{\mu} - T)^2 + \hat{\sigma}^2$	Minimize $\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2$	Minimize $-\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2$
Copeland and Nelson (1996)	Minimize $\hat{\sigma}$ such that $(\hat{\mu} - T)^2 \leq \Delta^2$	Minimize $\hat{\mu}$ Such that $\hat{\sigma} \leq \sigma_0$	Maximize $\hat{\mu}$ Such that $\hat{\sigma} \leq \sigma_0$
Kim and Lim (1998)	Maximize $\lambda$ such that $m(\hat{\mu}) \geq \lambda$ and $m(\hat{\sigma}) \geq \lambda$  $m(\hat{\mu})$ is chosen to favor the target value of $\hat{\mu}$  $m(\hat{\sigma})$ is chosen to favor small values of $\hat{\sigma}$	Maximize $\lambda$ such that $m(\hat{\mu}) \geq \lambda$ and $m(\hat{\sigma}) \geq \lambda$  $m(\hat{\mu})$ is chosen to favor small values of $\hat{\mu}$  $m(\hat{\sigma})$ is chosen to favor small values of $\hat{\sigma}$	Maximize $\lambda$ such that $m(\hat{\mu}) \geq \lambda$ and $m(\hat{\sigma}) \geq \lambda$  $m(\hat{\mu})$ is chosen to favor large values of $\hat{\mu}$  $m(\hat{\sigma})$ is chosen to favor small values of $\hat{\sigma}$

T = Target value for the mean response.

$m(\hat{\mu})$  = Fuzzy membership function for the mean response,  $0 \leq m(\hat{\mu}) \leq 1$ .

$\sigma_0$  = Target value for standard deviation response.

$m(\hat{\sigma})$  = Fuzzy membership function for the standard deviation response,

$\Delta$  = Upper limit on deviation of mean response from target.

$0 \leq m(\hat{\sigma}) \leq 1$ .

$\lambda$  = Smallest membership score desired by the analyst for the mean and standard deviation response,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Table 1 – Summary of Alternative Formulations of the Dual Response Problem.

Tabla 1 – Sumario de formulaciones alternativas del problema de respuesta dual.

Lin and Tu (1995) proposed a composite objective function based on the mean square error (MSE) criterion. This criterion deals with two major terms: the bias and the variance ( $MSE = (\hat{\mu} - T)^2 + \hat{\sigma}^2$ ). Lin and Tu (1995) point out that their optimization procedure is not necessarily restricted to a full second order model. Another advantage of the MSE approach is that it does not impose any constraints on the secondary response. Even though the basic idea behind Lin and Tu's approach is sound, it can encounter certain difficulties in applications: (1) the optimization method based on a composite objective function would result in “loss” of information during the conversion from a multiple response problem to a single response problem; and (2) the MSE criterion may result in some confounding of location and dispersion effects since the composite function consists of bias and variance term. In the “larger the better” and the “smaller the better” cases, the individual contributions of each term to the MSE will be difficult to control.

Lin y Tu (1995) proponen una función objetivo compuesta basada en el criterio del error cuadrado medio (MSE). Este criterio trata con dos términos mayores: el sesgo y la varianza ( $MSE = (\hat{\mu} - T)^2 + \hat{\sigma}^2$ ). Lin y Tu (1995) puntualizan que su procedimiento de optimización no se restringe necesariamente a un modelo de segundo orden completo. Otra ventaja del acercamiento por el MSE es que no impone restricciones sobre la respuesta secundaria. Aunque la idea básica detrás del acercamiento de Lin y Tu es legítima, pueden encontrar ciertas dificultades en las aplicaciones: (1) el método de optimización basado en una función objetivo compuesta resultaría en “pérdida” de información durante la conversión de un problema de respuesta múltiple a un problema de respuesta simple; y (2) el criterio del MSE puede producir algunas confusiones de los efectos de localización y dispersión ya que la función compuesta consiste del término sesgo y varianza. En los casos “más grande el mejor” y “más pequeño el mejor”, las contribuciones individuales de cada término al MSE serán difíciles de controlar.

In order to overcome the difficulties associated with the MSE criterion, Copeland and Nelson (1996) proposed a slightly different formulation of the problem. According to the formulation for the “target is best” case, one would seek the settings of  $x$ ’s that minimize a process standard deviation subject to a suggested constraint  $(\hat{\mu} - T)^2 \leq \Delta^2$ . Unlike the MSE criterion, this formulation allows a restriction on how far the resulting value of  $\hat{\mu}$  might be from  $T$ . For larger the better and smaller the better cases, they relaxed the constraint on the standard deviation response by replacing the  $\hat{\sigma} = \sigma_0$  constraint with  $\hat{\sigma} \leq \sigma_0$ . To solve the DRS problem, Copeland and Nelson (1996) used direct function minimization based on the simplex procedure of Nelder and Mead (1965).

Kim and Lin (1998) proposed a mathematical programming formulation to optimize the DRS problem based on fuzzy optimization methodology. Their approach simultaneously maximizes the degree of satisfaction considering both the mean and standard deviation responses. The membership function in fuzzy set theory was used to measure the degree of satisfaction of the decision-maker. Kim and Lin’s method is capable of modeling the decision-maker’s preference on the estimated responses and achieves a better balance between bias and variance.

Del Castillo, Fan, and Semple (1997) and Fan (2000) presented new computational methods for the global optimization of the DRS problem within a spherical region of interest. These authors pointed out that some other techniques such as general non-linear programming algorithms may settle on local optima, failing to obtain a global optimal solution.

More recently, Kim and Cho (2002) and Tang and Xu (to appear) proposed alternative formulations of the DRS problem based on goal programming. These formulations allow for explicit consideration of the trade-off between meeting the mean and the standard deviation targets.

Para superar las dificultades asociadas con el criterio del MSE, Copeland y Nelson (1996) propusieron una formulación ligeramente diferente del problema. De acuerdo a la formulación para el caso “objetivo es mejor”, uno buscaría las fijaciones de las  $x$ ’s que minimicen un proceso de la desviación estándar sujeto a una restricción sugerida  $(\hat{\mu} - T)^2 \leq \Delta^2$ . Al contrario del criterio del MSE, esta formulación permite una restricción que va adelante del valor resultante de  $\hat{\mu}$  podría ser desde  $T$ . Para los casos “más grande el mejor” y “más pequeño el mejor”, ellos suavizaron la restricción sobre la respuesta de la desviación estándar con reemplazo de la restricción  $\hat{\sigma} = \sigma_0$  por  $\hat{\sigma} \leq \sigma_0$ . Para resolver el problema del DRS, Copeland y Nelson (1996) utilizaron minimización directa de la función basada en el procedimiento simplex de Nelder y Mead (1965).

Kim y Lin (1998) proponen una formulación de programación matemática para optimizar el problema del DRS basada en la metodología de optimización fuzzy<sup>2</sup>. Su acercamiento maximiza el grado de satisfacción considerando las respuestas de la media y desviación estándar simultáneamente. La función del número de miembros en el conjunto teórico fuzzy fue utilizado para medir el grado de satisfacción en la toma de decisiones. El método de Kim y Lin es capaz de modelar la preferencia de la toma de decisiones sobre las respuestas estimadas y lograr un balance mejor entre el sesgo y la varianza.

Del Castillo, Fan, y Semple (1997) y Fan (2000) presentaron nuevos métodos computacionales para la optimización global del problema del DRS dentro de una región esférica de interés. Estos autores señalaron que algunas otras técnicas tales como los algoritmos de programación no lineal general pueden ser establecidos en el óptimo local, fallando en obtener una solución óptima global.

Más recientemente, Kim y Cho (2002) y Tang y Xu (por aparecer) propusieron formulaciones alternativas del problema del DRS basadas en la programación de objetivos. Estas formulaciones permiten la consideración explícita de los intercambios encontrados entre los objetivos de la media y la desviación estándar.

---

<sup>2</sup> La palabra fuzzy en inglés literalmente significa velludo, borroso o algunas veces se da la intepretación de rizado. En el contexto de este artículo, es la metodología de programación matemática de “lógica difusa”, la cual es usada para encontrar el mejor conjunto de valores que hacen más adecuada la aplicación o funcionamiento de un sistema. Para mayor información sobre la lógica difusa referirse a: [www.austinlinks.com/Fuzzy](http://www.austinlinks.com/Fuzzy) (nota del traductor).

### Revised Problem Formulation

As highlighted in the previous section, much of the past work in this area has attempted to provide a formal framework within which an optimum solution to the DRS problem could be sought. They are not, however, particularly suited to meet one's need to gain further insight into the problem. As a simple analogy, a key element of any likelihood based analysis is the contour and profile log-likelihood plots for the parameter estimates. Such plots yield much useful information that are not conveyed by the final maximum likelihood estimates. Our main thrust is to facilitate such exploration of the DRS problem.

A major drawback of the past approaches to DRS problem is the restriction on the secondary response. Such restrictions may rule out better conditions since an acceptable value for the secondary response is normally unknown. A more flexible formulation of the problem would be accomplished by considering the secondary response as another primary response. More formally, the DRS problem can be defined as:

- The smaller the better: {Minimize  $\hat{\mu}$ , Minimize  $\hat{\sigma}$ } subject to  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$  (3a)
- The larger the better: {Maximize  $\hat{\mu}$ , Minimize  $\hat{\sigma}$ } subject to  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$  (3b)

Where  $\hat{\mu}$  and  $\hat{\sigma}$  represent the fitted response surface functions for the mean and the standard deviation (as defined by (1) and (2)) respectively. The objective is to find the settings of  $x$ 's that would jointly optimize both response functions subject to the only constraint that defines the region of interest  $\mathbf{R}$ . We consider two different regions of interest, spherical and cuboidal. For cuboidal designs, the constraint is of the form  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ( $k$  is the number of control variables), and for spherical designs the constraint is defined by  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq \rho^2$  where  $\rho$  is the design radius. The value of  $\rho$  should be chosen in order to avoid solutions that are too far outside the experimental region that led to the response surfaces (1) and (2). For a central composite design, a logical choice is  $\rho = \alpha$  where  $\alpha$  is the axial distance. In the case of cuboidal designs (such as factorial and fractional factorial designs), a natural choice for the lower on upper bounds on the  $x$ 's are the experimental low and high levels (coded), respectively. Table 2 shows the handling of the basic cases of the RPD problem under the proposed approach.

### Revisión de la formulación del problema

Como se ha resaltado en la sección previa, mucho del trabajo anterior en esta área ha intentado proporcionar un marco formal dentro del cual una solución óptima al problema del DRS podría buscarse. Los aspectos anteriores no son, sin embargo, particularmente adecuados para satisfacer la necesidad personal de ganar visión extensa en el problema. Como una analogía simple, un elemento importante de cualquier análisis basado en la verosimilitud es el contorno y el perfil de los trazos de la carta de verosimilitud-logarítmica para los estimados del parámetro. Tales trazos rinden información muy útil que no se llevan al final en los estimados de máxima verosimilitud. Nuestra contribución principal es facilitar tal exploración en el problema del DRS.

Una desventaja mayor de los anteriores acercamientos al problema del DRS es la restricción en la respuesta secundaria. Tales restricciones pueden estar fuera de las condiciones mejores ya que un valor aceptable para la respuesta secundaria es normalmente desconocido. Una formulación más flexible del problema se logaría considerando la respuesta secundaria como otra respuesta primaria. Más formalmente, el problema del DRS puede ser definido como:

- El más pequeño el mejor: {Minimiza  $\hat{\mu}$ , Minimiza  $\hat{\sigma}$ } sujeto a  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$  (3a)
- El más grande el mejor: {Maximiza  $\hat{\mu}$ , Minimiza  $\hat{\sigma}$ } sujeto a  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$  (3b)

Donde  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  representan las funciones de superficie de respuesta fijadas para la media y la desviación estándar (como han sido definidas por (1) y (2)) respectivamente. El objetivo es encontrar las fijaciones de las  $x$ 's que optimiza conjuntamente ambas funciones respuesta sujetas a la única restricción que define la región de interés  $\mathbf{R}$ . Nosotros consideramos dos regiones diferentes de interés, cuboidal y esférica. Para los diseños cuboidales, las restricciones son de la forma  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ( $k$  es el número de variables de control), y para los diseños esféricos la restricción esta definida por  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq \rho^2$  donde  $\rho$  es el radio de diseño. El valor de  $\rho$  se debe escoger evitando soluciones que están demasiado lejanas de la región experimental de las superficies de respuesta (1) y (2). Para un diseño de composición central, una opción lógica es  $\rho = \alpha$  donde  $\alpha$  es la distancia axial. En el caso de diseños cuboidales (tales como los diseños factoriales y los diseños factoriales fraccionados), una opción natural para los límites bajo y alto en las  $x$ 's son los niveles experimentales bajo y alto (codificados), respectivamente. La Tabla 2 muestra el manejo de los casos básicos del problema del RPD bajo el acercamiento propuesto.

Case	Proposed Approach
The smaller the better	Minimize both $\hat{\mu}$ and $\hat{\sigma}$ .
The larger the better	Maximize $\hat{\mu}$ and minimize $\hat{\sigma}$ .
The target is best	Obtained by further iterating from a solution based on other cases.

Table 2 – Handling of Basic Cases of Robust Parameter Design.

The proposed formulation of the DRS problem is directly applicable for the “smaller the better” and the “larger the better” cases of RPD. A solution for the “target is best” case can also be found by iterating from a solution obtained for one of the other cases. This case, however, can be more directly addressed using one of the past approaches (e.g., Del Castillo and Montgomery, 1993 or Copeland and Nelson, 1996) since there is a preset constraint on the value of the mean response function and thus simultaneous optimization is not necessary.

A close examination of the problem formulation in (3) indicate that in the absence of a further constraint on either  $\hat{\mu}$  or  $\hat{\sigma}$ , generally there is not a unique solution. In the case of the “larger the better”, for example, the value of the mean response can be further increased as one is willing to increase the value of the standard deviation response along with it. Consequently, there will be many alternative solutions under the proposed formulation instead of a few single point solutions as dictated by the earlier formulation of the DRS problem. The string of solutions generated as such are known as Pareto optimal solutions (i.e., one can not improve any criterion without deteriorating a value of at least one other criterion).

A suitable nonlinear optimization algorithm can be adapted to solve (3). For this purpose we utilized the NIMBUS software (Miettinen, 1999, 195-207) which is freely accessible on the internet at <http://nimbus.mit.jyu.fi/>. The NIMBUS algorithm is based on standard multiobjective programming and produces a string of Pareto optimal solutions automatically. In this regard we have found it particularly appropriate for DRS problems.

Caso	Acercamiento Propuesto
El más pequeño el mejor	Minimizar $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ .
El más grande el mejor	Maximizar $\hat{\mu}$ y minimizar $\hat{\sigma}$ .
El objetivo es mejor	Obtenido por iteraciones posteriores a partir de una solución basada en otros casos.

Tabla 2 – Manejo de casos básicos del Diseño de Parámetro Robusto.

La formulación propuesta del problema del DRS es aplicable directamente para los casos del RPD el “más pequeño el mejor” y el “más grande el mejor”. Una solución para el caso “objetivo es mejor” puede también ser encontrada por iteraciones desde una solución obtenida por uno de los otros casos. Este caso, sin embargo, puede ser dirigido directamente usando uno de los acercamientos anteriores (por ejemplo, Del Castillo y Montgomery, 1993 o Copeland y Nelson, 1996) ya que hay una restricción prefijada subsecuentemente en el valor de la función respuesta media y en consecuencia la optimización simultánea no es necesaria.

Un examen similar de la formulación del problema en (3a) o (3b) indica que en la ausencia de una restricción posterior sobre  $\hat{\mu}$  o  $\hat{\sigma}$ , no hay generalmente una única solución. En el caso del “más grande el mejor”, por ejemplo, el valor de la respuesta media puede ser aumentado como uno lo deseé, sin embargo, el valor de la respuesta de la desviación estándar puede aumentar junto con él. Por consiguiente, habrá muchas soluciones alternativas bajo la formulación propuesta en lugar de unas pocas soluciones puntuales individuales tal como lo dictado por la formulación más temprana del problema del DRS. La cadena de soluciones generadas, son conocidas como soluciones óptimas Pareto (es decir, uno no puede mejorar algún criterio sin deteriorar un valor de por lo menos otro criterio).

Un algoritmo de optimización no lineal conveniente puede ser adaptado para resolver (3a) o (3b). Utilizamos el software NIMBUS (Miettinen, 1999, 195-207) para este propósito, es libremente accesible en el internet en <http://nimbus.mit.jyu.fi/>. El algoritmo NIMBUS esta basado en programación multiobjetivo estándar y produce una cadena de soluciones óptimas Pareto automáticamente. En lo considerado, nosotros lo hemos encontrado particularmente apropiado para los problemas del DRS.

The GRG algorithm of Del Castillo and Montgomery (1993) or the direct function minimization suggested by Copeland and Nelson (1996) can also be adapted to generate a string of solutions by successively changing the constraint value on the secondary response function. Vining and Myers (1990) attempted to do this in a somewhat limited manner by considering three distinct target values for standard deviation (in the printing example). We used the Solver in the Excel spreadsheet which is based on the GRG algorithm to implement this approach in a more extensive fashion. The Appendix provides for further information about NIMBUS and the use of the Solver in Excel.

### Examples

In this section, we will present three examples from the literature to illustrate the approach to DRS optimization outlined above. In the first example, only control variables are present. The other two examples include both control and noise variables. For these examples, we obtained nearly identical results from NIMBUS and the Solver in the Excel spreadsheet. In these examples, even though both the mean and standard deviation response functions are estimated from data, our analyses essentially ignore the uncertainty associated with estimation. This is a subject for further study.

#### EXAMPLE 1: CONTROL VARIABLES ONLY

The printing study example of Vining and Myers (1990) (adapted from Box and Draper, 1987, p. 247) has appeared repeatedly in the literature on DRS. This experiment was conducted to investigate the effects of speed ( $x_1$ ), pressure ( $x_2$ ), and distance ( $x_3$ ) on a printing machine's ability to apply coloring inks upon package labels ( $y$ ). A three-level factorial design on the three control variables with three runs at each design point was used to fit the responses. Table 3 displays the data from this experiment.

In this table,  $\bar{y}_u$  and  $s_u$  are the usual point estimates of mean and standard deviation, respectively, at the  $u_{th}$  design point. The fitted response surface functions are (Vining and Myers, 1990)

El algoritmo GRG de Del Castillo y Montgomery (1993) o la minimización de la función directa sugerida por Copeland y Nelson (1996) también pueden adaptarse para generar una cadena de soluciones cambiando el valor de la restricción consecutivamente en la función de respuesta secundaria. Vining y Myers (1990) intentaron hacer esto de una manera algo limitada considerando tres valores objetivo distintos para la desviación estándar (en el ejemplo de la impresión). Nosotros utilizamos el Solver en la hoja de cálculo Excel el cual esta basado en el algoritmo del GRG, para implementar este acercamiento en una modalidad más extensa. El Apéndice suministra información sobre el NIMBUS y el uso del Solver en Excel.

### Ejemplos

En esta sección, presentaremos tres ejemplos de la literatura para ilustrar el acercamiento a la optimización del DRS perfilado anteriormente. En el primer ejemplo, están presentes sólo variables de control. Los otros dos ejemplos incluyen variables de control y de ruido. Para estos ejemplos, obtuvimos resultados casi idénticos desde el NIMBUS y desde el Solver en la hoja de cálculo Excel. En estos ejemplos, aunque ambas funciones de respuesta de la media y desviación estándar son estimadas desde los datos, nuestros análisis ignoran esencialmente la incertidumbre asociada con la estimación. Esto esta sujeto para estudio posterior.

#### EJEMPLO 1: SÓLO VARIABLES DE CONTROL

El ejemplo del estudio de impresión de Vining y Myers (1990) (adaptado de Box y Draper, 1987, p. 247) repetidamente ha aparecido en la literatura del DRS. Este experimento fue dirigido para investigar los efectos de la velocidad ( $x_1$ ), la presión ( $x_2$ ), y la distancia ( $x_3$ ) en la habilidad de una máquina de impresión para aplicar las tintas colorantes sobre paquetes de etiquetas ( $y$ ). Fue utilizado para fijar las respuestas, un diseño factorial de tres niveles, en las tres variables de control, con tres corridas en cada punto del diseño. La Tabla 3 despliega los datos de este experimento.

En esta tabla,  $\bar{y}_u$  y  $s_u$  son los usuales estimados puntuales de la media y desviación estándar respectivamente, en el  $u_{ésimo}$  punto del diseño. Las funciones de superficie de respuesta fijadas (Vining y Myers, 1990) son:

$$\hat{\mu} = 327.6 + 177x_1 + 109.4x_2 + 131.5x_3 + 32.0x_1^2 - 22.4x_2^2 - 29.1x_3^2 + 66x_1x_2 + 75.5x_1x_3 + 43.6x_2x_3$$

and

$$\hat{\sigma} = 34.9 + 11.5x_1 + 15.3x_2 + 29.2x_3 + 4.2x_1^2 - 1.3x_2^2 + 16.8x_3^2 + 7.7x_1x_2 + 5.1x_1x_3 + 14.1x_2x_3.$$

As discussed by Vining and Myers (1990) and Lin and Tu (1995), the second-order models in this example are probably over-specified. Lin and Tu (1995) considered reduced models. As mentioned before, the solution methodology used here does not require that the response surfaces be complete quadratics.

u	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>u1</sub>	y <sub>u2</sub>	y <sub>u3</sub>	y <sub>u</sub>	s <sub>u</sub>
1	-1	-1	-1	34.0	10.0	28.0	24.0	12.5
2	0	-1	-1	115.0	116.0	130.0	120.3	8.4
3	1	-1	-1	192.0	186.0	263.0	213.7	42.8
4	-1	0	-1	82.0	88.0	88.0	86.0	3.7
5	0	0	-1	44.0	178.0	188.0	136.7	80.4
6	1	0	-1	322.0	350.0	350.0	340.7	16.2
7	-1	1	-1	141.0	110.0	86.0	112.3	27.6
8	0	1	-1	259.0	251.0	259.0	256.3	4.6
9	1	1	-1	290.0	280.0	245.0	271.7	23.6
10	-1	-1	0	81.0	81.0	81.0	81.0	0.0
11	0	-1	0	90.0	122.0	93.0	101.7	17.7
12	1	-1	0	319.0	376.0	376.0	357.0	32.9
13	-1	0	0	180.0	180.0	154.0	171.3	15.0
14	0	0	0	372.0	372.0	372.0	372.0	0.0
15	1	0	0	541.0	568.0	396.0	501.7	92.5
16	-1	1	0	288.0	192.0	312.0	264.0	63.5
17	0	1	0	432.0	336.0	513.0	427.0	88.6
18	1	1	0	713.0	725.0	754.0	730.7	21.1
19	-1	-1	1	364.0	99.0	199.0	220.7	133.8
20	0	-1	1	232.0	221.0	266.0	239.7	23.5
21	1	-1	1	408.0	415.0	443.0	422.0	18.5
22	-1	0	1	182.0	233.0	182.0	199.0	29.4
23	0	0	1	507.0	515.0	434.0	485.3	44.6
24	1	0	1	846.0	535.0	640.0	673.7	158.2
25	-1	1	1	236.0	126.0	168.0	176.7	55.5
26	0	1	1	660.0	440.0	403.0	501.0	138.9
27	1	1	1	878.0	991.0	1161	1010	142.5

Table 3 – Example 1: The Printing Study Data

Graphical methods provide a useful starting point to address a DRS problem. These methods involve superimposing the contour plots for the mean and standard deviation response functions. This overlay is then visually examined to locate optimum operating conditions of the x's. Obviously, contour plotting is less practical when the number of the design variables exceeds three. Figure 1 displays the overlaid contour plots for mean and standard deviation response functions of the printing example. In generating these plots, it was assumed that a mean value greater than 500 and standard deviation less than 60 were desired. These values were used as target values by past authors who studied the same problem.

Como lo discutido por Vining y Myers (1990), Lin y Tu (1995), los modelos de segundo orden en este ejemplo probablemente están sobre-especificados. En este modelo Lin y Tu (1995) consideraron modelos reducidos. Como se ha mencionado antes, la metodología de solución utilizada aquí, no requiere que las superficies de respuesta sean cuadráticas completas.

u	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>u1</sub>	y <sub>u2</sub>	y <sub>u3</sub>	y <sub>u</sub>	s <sub>u</sub>
1	-1	-1	-1	34.0	10.0	28.0	24.0	12.5
2	0	-1	-1	115.0	116.0	130.0	120.3	8.4
3	1	-1	-1	192.0	186.0	263.0	213.7	42.8
4	-1	0	-1	82.0	88.0	88.0	86.0	3.7
5	0	0	-1	44.0	178.0	188.0	136.7	80.4
6	1	0	-1	322.0	350.0	350.0	340.7	16.2
7	-1	1	-1	141.0	110.0	86.0	112.3	27.6
8	0	1	-1	259.0	251.0	259.0	256.3	4.6
9	1	1	-1	290.0	280.0	245.0	271.7	23.6
10	-1	-1	0	81.0	81.0	81.0	81.0	0.0
11	0	-1	0	90.0	122.0	93.0	101.7	17.7
12	1	-1	0	319.0	376.0	376.0	357.0	32.9
13	-1	0	0	180.0	180.0	154.0	171.3	15.0
14	0	0	0	372.0	372.0	372.0	372.0	0.0
15	1	0	0	541.0	568.0	396.0	501.7	92.5
16	-1	1	0	288.0	192.0	312.0	264.0	63.5
17	0	1	0	432.0	336.0	513.0	427.0	88.6
18	1	1	0	713.0	725.0	754.0	730.7	21.1
19	-1	-1	1	364.0	99.0	199.0	220.7	133.8
20	0	-1	1	232.0	221.0	266.0	239.7	23.5
21	1	-1	1	408.0	415.0	443.0	422.0	18.5
22	-1	0	1	182.0	233.0	182.0	199.0	29.4
23	0	0	1	507.0	515.0	434.0	485.3	44.6
24	1	0	1	846.0	535.0	640.0	673.7	158.2
25	-1	1	1	236.0	126.0	168.0	176.7	55.5
26	0	1	1	660.0	440.0	403.0	501.0	138.9
27	1	1	1	878.0	991.0	1161	1010	142.5

Tabla 3 – Ejemplo 1: Los datos del estudio de impresión

Los métodos gráficos proporcionan un punto de partida útil para dirigir un problema del DRS. Estos métodos involucran que los trazos de contorno para las funciones respuesta de la media y desviación estándar se sobrepongan. Esta superposición es entonces examinada visualmente para localizar las condiciones de operación óptimas de las x's. Obviamente, el trazado de contorno es menos práctico cuando el número de las variables de diseño excede de tres. La Figura 1 despliega el trazo de contorno recubierto para las funciones respuesta de la media y la desviación estándar del ejemplo de impresión. En la generación de estos trazos, fue supuesto que es deseable, un valor de la media más grande que 500 y la desviación estándar menor que 60. Estos valores fueron utilizados como valores objetivo por autores anteriores que estudiaron el mismo problema.

Since only two control variables can be used at a time in a contour plot, we held the value of  $x_1$  fixed at 0.5, 1 and 1.5. The white area shows the operating region (or process conditions) where both the mean and standard deviation requirements can be met. These plots suggest that the value of  $x_1$  needs to be set somewhat large (say, around 1) in order to be able to meet both requirements comfortably. At a set value of  $x_1$ , the levels of the variables  $x_2$  and  $x_3$  need be changed in reverse directions in order to continue meet the requirements on mean and standard deviation simultaneously. Such graphical displays are useful to gain useful insights about the problem. Analytic techniques will be needed in order to be able to differentiate among the alternative solutions in the white (i.e., feasible) region.

The horizontal axis is  $x_2$ ; the vertical axis is  $x_3$ .  
The scale for both axes is from -1.5 to 1.5  
Upper Bound Std Dev = 60 -----  
Lower Bond Mean = 500 \_\_\_\_\_  
Hold values  $x_1$ : 0.5       $x_1$ : 1.0       $x_1$ : 1.5

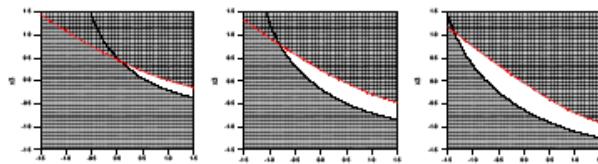


Figure 1 – Example 1: Overlaid Contour Plots for Mean and Standard Deviation

In applying the proposed approach to the printing example, we will consider the “larger the better” case. Furthermore, we will consider both cuboidal and spherical region constraints. Since the design is factorial, it can be argued that the cuboidal region would be more appropriate. We will, however, consider the spherical region for sake of completeness as this region was used by other researchers who studied the same example.

**Cuboidal Region:** Table 4 displays the results obtained by using the cuboidal region  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . In this table, the first ten alternatives are Pareto optimal solutions obtained by the first classification (see the Appendix for a description of the first and second classifications in the NIMBUS algorithm). For example, the interpretation for the fourth alternative is as follows: Under the cuboidal region, 55.01 is the smallest standard deviation value that can be attained if the mean response function is held fixed at 579.62 (or 579.62 is the largest mean value that can be attained if the standard deviation is held fixed at 55.01). The other solutions in the table can be interpreted similarly. The string of solutions displayed here highlight the trade-offs that one needs to consider in order to obtain a compromise solution that satisfies both mean and standard deviation requirements.

Dado que sólo pueden utilizarse dos variables de control a la vez en un trazo de contorno, mantenemos fijo el valor de  $x_1$  a 0.5, 1 y 1.5. El área blanca muestra la región operativa (o condiciones del proceso) donde ambos requerimientos de media y desviación estándar pueden ser reunidos. Estos trazos sugieren que el valor de  $x_1$  necesita ser establecido algo grande (digamos, alrededor de 1) para poder reunir ambos requisitos cómodamente. A un valor fijo de  $x_1$ , los niveles de las variables  $x_2$  y  $x_3$  necesitan ser cambiados en direcciones opuestas para continuar con los requisitos simultáneos de media y desviación estándar. Tales despliegues gráficos son útiles para ganar visión profunda sobre el problema. Se necesitarán las técnicas analíticas para poder diferenciar la cantidad de soluciones alternativas en la región blanca (es decir, factible).

El eje horizontal es  $x_2$ , el eje vertical es  $x_3$ .  
La escala para ambos ejes es desde -1.5 a 1.5  
Límite superior de la desviación estándar = 60 -----  
Límite inferior de la media = 500 \_\_\_\_\_  
Valores fijos de  $x_1$ :  
 $x_1$ : 0.5       $x_1$ : 1.0       $x_1$ : 1.5

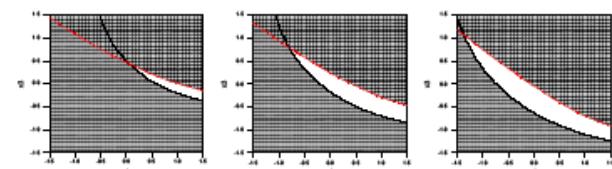


Figura 1 – Ejemplo 1: Los trazos de contorno recubiertos para la media y desviación estándar

Aplicando el acercamiento propuesto al ejemplo de la impresión, consideraremos el caso “más grande el mejor”. Además, consideraremos región de restricciones cuboidal y esférica. Dado que el diseño es factorial, puede ser argumentado que la región cuboidal sería más apropiada. Nosotros queremos, sin embargo, considerar la región esférica por el propio bien de la integridad de esta región ya que ha sido utilizada por otros investigadores que estudiaron el mismo ejemplo.

**Región Cuboidal:** La Tabla 4 despliega los resultados obtenidos usando la región cuboidal  $-1 \leq x_i \leq 1$   $i = 1, 2, 3$ . En esta tabla, las primeras diez alternativas son soluciones óptimas Pareto obtenidas por la primera clasificación (ver el Apéndice para una descripción de la primera y segunda clasificaciones en el algoritmo NIMBUS). Por ejemplo, la interpretación para la cuarta alternativa es como sigue: Bajo la región cuboidal, 55.01 es el valor de la desviación estándar más pequeño que puede lograrse si la función de respuesta media se mantiene fija a 579.62 (o 579.62 es el valor medio más grande que puede ser logrado si la desviación estándar se mantiene fija a 55.01). Las otras soluciones en la tabla pueden interpretarse similarmente. La cadena de soluciones desplegada aquí, resalta los intercambios que uno necesita considerar para obtener una solución de compromiso que satisface los requerimientos de la media y de la desviación estándar.

For example, the tenth alternative,  $\mathbf{x}' = (1, 1, 1)$ , produces the highest value for the mean function,  $\hat{\mu} = 911.10$  with a standard deviation of  $\hat{\sigma} = 137.5$ . If a smaller value of standard deviation is required, the decision-maker needs to sacrifice some value for the mean function and move in the direction of the first alternative. The intermediate solutions provide further alternatives. As mentioned earlier, one can often find a solution for the “target is best” case while searching through solutions of the “larger the better” situation. Furthermore, in NIMBUS the decision-maker can iterate from an existing alternative solution in order to get desirably close to target values of the responses. This would lead to solutions under second classification. Partial results from the second classification are also shown in Table 4. The second alternative of the second classification yields a solution (mean = 616.70) for the “larger the better” case when the value of the standard deviation is 60. Likewise, the fifth alternative of the second classification provides a solution of the “target (i.e., 500) is best” situation with a small bias on the estimated mean response (i.e.,  $\hat{\mu} = 495.98$ ,  $\hat{\sigma} = 44.65$ ).

<b>First Classification:</b>			
Alternatives	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\mathbf{x}'$
1	396.30	32.91	(1.0, -0.6390, -0.1047)
2	454.42	39.69	(1.0, -0.2383, -0.1934)
3	514.92	46.90	(1.0, 0.2416, -0.2781)
4	579.62	55.01	(1.0, 0.6979, -0.2789)
5	643.99	64.20	(1.0, 1.0, -0.1783)
6	707.73	75.92	(1.0, 1.0, 0.0730)
7	768.02	89.82	(1.0, 1.0, 0.3252)
8	819.61	104.30	(1.0, 1.0, 0.5545)
9	867.13	120.19	(1.0, 1.0, 0.7789)
10	911.10	137.50	(1.0, 1.0, 1.0)

<b>Second Classification:</b>			
2	616.70	60.00	(1.0, 1.0, -0.2817)
5	495.98	44.65	(1.0, 0.1643, -0.3085)

Table 4 – Example 1: Results for the “Larger the Better” Case (Cuboidal Region  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1,2,3$ )

Figure 2 displays the complete set of solutions for the printing example under the cuboidal region  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i=1,2,3$ . This plot displays the trade-offs between mean and standard deviation responses and provides useful input to the decision-making process.

Por ejemplo, la décima alternativa,  $\mathbf{x}' = (1, 1, 1)$ , produce el valor más alto para la función media,  $\hat{\mu} = 911.10$  con una desviación estándar de  $\hat{\sigma} = 137.5$ . Si es requerido un valor más pequeño de la desviación estándar, la toma de decisiones necesita sacrificar algún valor para la función media y moverse en la dirección de la primera alternativa. Las soluciones intermedias proporcionan alternativas extensas. Como se ha mencionado antes, a menudo puede encontrar una solución para el caso “objetivo es mejor” mientras se investiga a través de las soluciones de la situación “más grande el mejor”. Además, en el NIMBUS puede ser iterada la toma de decisiones desde una solución alternativa existente, para obtener deseablemente cerca los valores objetivo de las respuestas. Esto llevaría a las soluciones bajo la segunda clasificación. Los resultados parciales de la segunda clasificación también se muestran en la Tabla 4. La segunda alternativa de la segunda clasificación rinde una solución (media = 616.70) para el caso “más grande el mejor” cuando el valor de la desviación estándar es 60. Igualmente, la quinta alternativa de la segunda clasificación proporciona una solución de la situación “objetivo es mejor” (es decir, 500) con un pequeño sesgo en la respuesta media estimada (es decir,  $\hat{\mu} = 495.98$ ,  $\hat{\sigma} = 44.65$ ).

<b>Primera Clasificación:</b>			
Alternativas	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\mathbf{x}'$
1	396.30	32.91	(1.0, -0.6390, -0.1047)
2	454.42	39.69	(1.0, -0.2383, -0.1934)
3	514.92	46.90	(1.0, 0.2416, -0.2781)
4	579.62	55.01	(1.0, 0.6979, -0.2789)
5	643.99	64.20	(1.0, 1.0, -0.1783)
6	707.73	75.92	(1.0, 1.0, 0.0730)
7	768.02	89.82	(1.0, 1.0, 0.3252)
8	819.61	104.30	(1.0, 1.0, 0.5545)
9	867.13	120.19	(1.0, 1.0, 0.7789)
10	911.10	137.50	(1.0, 1.0, 1.0)

<b>Segunda Clasificación:</b>			
2	616.70	60.00	(1.0, 1.0, -0.2817)
5	495.98	44.65	(1.0, 0.1643, -0.3085)

Tabla 4 – Ejemplo 1: Resultados para el caso “más grande el mejor” (Región cuboidal  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1,2,3$ )

La Figura 2 despliega el conjunto completo de soluciones para el ejemplo de impresión, bajo la región cuboidal  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i=1,2,3$ . Este trazo despliega los intercambios entre las respuestas de la media y de la desviación estándar y proporciona entrada útil al proceso de toma de decisiones.

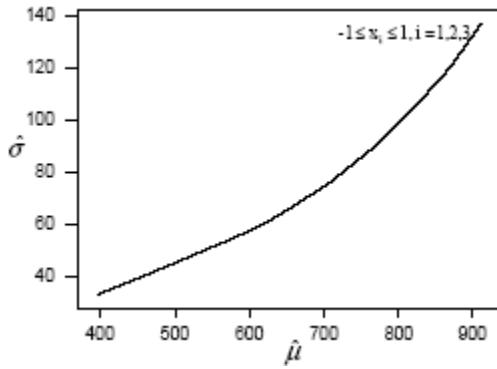


Figure 2 – Example 1: Pareto Optimal Solutions for the “Larger the Better” Case (Cuboidal Region  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i=1,2,3$ ). (For reference, the unconstrained maximum within the cuboidal region for the mean response  $\hat{\mu} = 911.1$  and minimum for the standard deviation response  $\hat{\sigma} = 12.5$ )

**Spherical Region:** Table 5 displays the results based on a spherical region  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 1$ . The fifteenth alternative gives the highest mean,  $\hat{\mu} = 639.37$ , while the standard deviation is 77.23. However, this may not be the best compromising solution since the value of the standard deviation seems high. The sixth alternative of the first classification is the solution of the target mean 500 is best situation with a small bias on the estimated mean response (i.e.,  $\hat{\mu} = 497.52$  and  $\hat{\sigma} = 45.01$ ).

First Classification:			
Alternatives	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\mathbf{x}'$
1	385.02	33.14	(0.8720, -0.2819, -0.3699)
2	411.16	35.38	(0.9110, -0.3183, -0.2480)
3	432.28	37.58	(0.9391, -0.2446, -0.2342)
4	454.97	40.06	(0.9616, -0.2075, -0.1777)
5	475.64	42.40	(0.9751, -0.0655, -0.2088)
6	497.52	45.01	(0.9835, 0.0146, -0.1780)
7	519.18	47.79	(0.9789, 0.1283, -0.1591)
8	540.33	50.73	(0.9772, 0.1854, -0.1030)
9	560.62	53.85	(0.9711, 0.2354, -0.0399)
10	579.75	57.17	(0.9590, 0.2820, 0.0281)
11	597.35	60.70	(0.9419, 0.3196, 0.1035)
12	612.94	64.45	(0.9167, 0.3548, 0.1837)
13	625.90	68.44	(0.8829, 0.3836, 0.2708)
14	635.26	72.68	(0.8367, 0.4081, 0.3652)
15	639.37	77.23	(0.7728, 0.4265, 0.4699)

Second Classification:			
Alternatives	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\mathbf{x}'$
11	608.61	63.33	(0.9249, 0.3451, 0.1595)
12	605.17	62.48	(0.9305, 0.3380, 0.1412)
13	601.65	61.66	(0.9360, 0.3296, 0.1238)
14	598.04	60.85	(0.9410, 0.3210, 0.1068)
15	594.35	60.06	(0.9454, 0.3134, 0.0897)

Table 5 – Example 1: Results for the “Larger the Better” Case under  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 1$ .

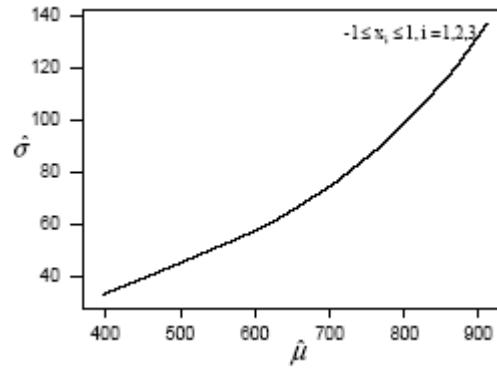


Figura 2 – Ejemplo 1: Soluciones óptimas Pareto para el caso “más grande el mejor” (Región cuboidal  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1,2,3$ ). (Para referencia, el máximo no restringido dentro de la región cuboidal para la respuesta media es  $\hat{\mu} = 911.1$  y el mínimo para la respuesta de la desviación estándar es  $\hat{\sigma} = 12.5$ )

**Región Esférica:** La Tabla 5 despliega los resultados basados en una región esférica  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 1$ . La decimoquinta alternativa da la media más alta,  $\hat{\mu} = 639.37$ , mientras la desviación estándar es 77.23. Sin embargo, ésta no puede ser la solución de compromiso mejor, dado que el valor de la desviación estándar parece alto. La sexta alternativa de la primera clasificación es la solución de la situación “objetivo es mejor” de la media 500 con un pequeño sesgo en la respuesta media estimada (es decir,  $\hat{\mu} = 497.52$  y  $\hat{\sigma} = 45.01$ ).

First Classification:			
Alternatives	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\mathbf{x}'$
1	385.02	33.14	(0.8720, -0.2819, -0.3699)
2	411.16	35.38	(0.9110, -0.3183, -0.2480)
3	432.28	37.58	(0.9391, -0.2446, -0.2342)
4	454.97	40.06	(0.9616, -0.2075, -0.1777)
5	475.64	42.40	(0.9751, -0.0655, -0.2088)
6	497.52	45.01	(0.9835, 0.0146, -0.1780)
7	519.18	47.79	(0.9789, 0.1283, -0.1591)
8	540.33	50.73	(0.9772, 0.1854, -0.1030)
9	560.62	53.85	(0.9711, 0.2354, -0.0399)
10	579.75	57.17	(0.9590, 0.2820, 0.0281)
11	597.35	60.70	(0.9419, 0.3196, 0.1035)
12	612.94	64.45	(0.9167, 0.3548, 0.1837)
13	625.90	68.44	(0.8829, 0.3836, 0.2708)
14	635.26	72.68	(0.8367, 0.4081, 0.3652)
15	639.37	77.23	(0.7728, 0.4265, 0.4699)

Second Classification:			
Alternatives	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\mathbf{x}'$
11	608.61	63.33	(0.9249, 0.3451, 0.1595)
12	605.17	62.48	(0.9305, 0.3380, 0.1412)
13	601.65	61.66	(0.9360, 0.3296, 0.1238)
14	598.04	60.85	(0.9410, 0.3210, 0.1068)
15	594.35	60.06	(0.9454, 0.3134, 0.0897)

Tabla 5 – Ejemplo 1: Resultados para el caso “más grande el mejor” bajo  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 1$ .

Figure 3 graphically displays the Pareto optimal solutions with  $\rho^2 = 1,2,3$ . As the bound on  $x$ 's is relaxed, it is possible to achieve a smaller standard deviation (larger mean) for a set value of mean (standard deviation). For solutions under  $\rho^2 = 2$  and 3, both  $x_2$  and  $x_3$  are well within the design space (i.e., between -1 and +1) while  $x_1$  takes on values outside the experimental range (these solutions are not shown here).

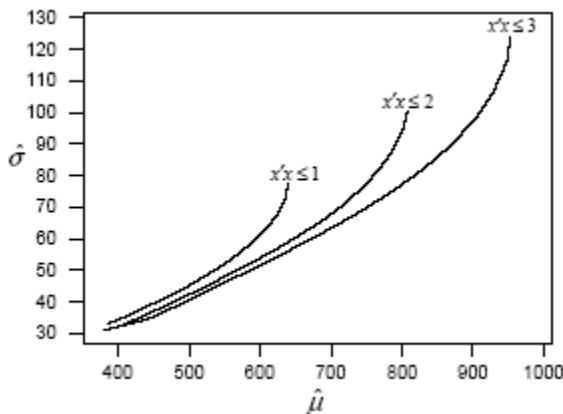


Figure 3 – Example 1: Pareto Optimal Solutions for the “Larger the Better” Case ( $x'x \leq 1$ ). (For reference, the unconstrained maximum for the mean response  $\hat{\mu} = 639.4$  and the minimum for the standard deviation  $\hat{\sigma} = 15.7$ ).

Table 6 summarizes the solutions obtained from Excel’s Solver for the “target is best” and “larger the better” cases in spherical regions. For the proposed approach, the mean and standard deviation responses can be individually made desirably close to their respective desired/implied target values. Overall, for the target mean of 500 and target standard deviation of 60, the results from the proposed approach are in good agreement with those obtained by previous researchers. The results from different approaches, however, cannot be compared in a straightforward manner since the methods differ in terms of their optimization criteria.

Target is Best (T=500)		Larger the Better ( $\sigma_0=60$ )	
Min $\hat{\sigma}$	$x'x$	Max $\hat{\mu}$	$x'x$
45.32	$\leq 1.0$	594.09	$\leq 1.0$
42.45	$\leq 2.0$	647.65	$\leq 2.0$
40.66	$\leq 3.0$	672.50	$\leq 3.0$

Table 6 – Example 1: Summary of Solutions.

La Figura 3 despliega gráficamente las soluciones óptimas Pareto con  $\rho^2 = 1,2,3$ . Como el límite en las  $x$ 's está confortable, es posible lograr una desviación estándar más pequeña (con media más grande) o para un valor fijo de media (desviación estándar menor). Para soluciones bajo  $\rho^2 = 2$  y 3,  $x_2$  y  $x_3$  están dentro del espacio de diseño (es decir, entre -1 y +1) mientras que los valores de  $x_1$  fuera del rango experimental, no se muestran aquí.

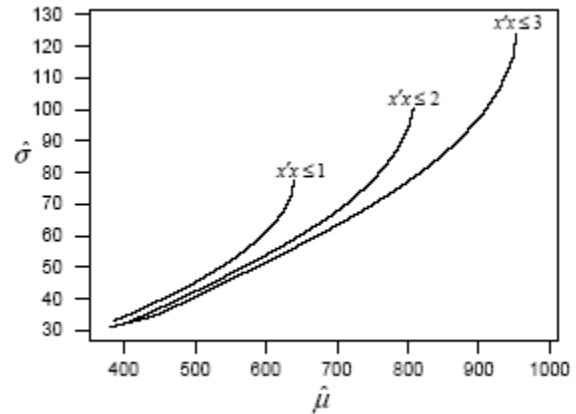


Figura 3 – Ejemplo 1: Soluciones óptimas Pareto para el caso “más grande el mejor” con región  $x'x \leq 1$ . (Para referencia, el máximo no restringido para la respuesta media es  $\hat{\mu} = 639.4$  y el mínimo para la respuesta desviación estándar es  $\hat{\sigma} = 15.7$ ).

La Tabla 6 resume las soluciones obtenidas desde el Solver del Excel para los casos “objetivo es mejor” y “más grande el mejor” en las regiones esféricas. Para el acercamiento propuesto, las respuestas de la media y desviación estándar pueden hacerse deseablemente cerca a sus valores objetivos, individualmente implicados o deseados. En conjunto, para el objetivo de la media de 500 y el objetivo de la desviación estándar de 60, los resultados desde el acercamiento propuesto están en buen acuerdo con aquéllos obtenidos por los investigadores anteriores. Los resultados de acercamientos diferentes, sin embargo, no pueden ser comparados de una manera simple dado que los métodos difieren en términos de su criterio de optimización.

Target is Best (T=500)		Larger the Better ( $\sigma_0=60$ )	
Min $\hat{\sigma}$	$x'x$	Max $\hat{\mu}$	$x'x$
45.32	$\leq 1.0$	594.09	$\leq 1.0$
42.45	$\leq 2.0$	647.65	$\leq 2.0$
40.66	$\leq 3.0$	672.50	$\leq 3.0$

Tabla 6 – Ejemplo 1: Resumen de soluciones.

**EXAMPLE 2: BOTH CONTROL AND NOISE VARIABLES**

The proposed formulation of the DRS problem can also be applied to design problems in which the control and noise variables were used in a combined array (Myers and Montgomery (1995, p. 511)). The following example from an application at a semiconductor manufacturing facility is taken from Montgomery (2001, pp. 497-500). This example involves a combined array design with two control (x) and three noise (z) variables. The purpose of the experiment was to find operating conditions that kept the process mean below 30 along with reasonably small variability. The fitted response surface (for coded control and noise variable levels) is

$$\hat{y} = 30.37 - 2.92x_1 - 4.13x_2 + 2.60x_1^2 + 2.18x_2^2 + 2.87x_1x_2 + 2.73z_1 - 2.33z_2 + 2.33z_3 - 0.27x_1z_1 + 0.89x_1z_2 + 2.58x_1z_3 + 2.01x_2z_1 - 1.43x_2z_2 + 1.56x_2z_3$$

From the fitted response model, the mean and variance models are obtained (assuming that the noise variables are uncorrelated with each other with  $E(z_1) = E(z_2) = E(z_3) = 0$  and  $\sigma_{z1}^2 = \sigma_{z2}^2 = \sigma_{z3}^2 = 1.0$ ) as

$$\hat{\mu} = 30.37 - 2.92x_1 - 4.13x_2 + 2.60x_1^2 + 2.18x_2^2 + 2.87x_1x_2$$

and

$$\hat{\sigma}^2 = 18.334 + 6.4012x_1 + 24.908x_2 + 7.5214x_1^2 + 8.5186x_2^2 + 4.4188x_1x_2$$

The variance function was obtained using the propagation of error method (Lucas, 1994 and Myers, Khuri and Vining, 1992) and it also includes the replication variance (obtained from the 3 center points). Incidentally, the variance function above differs slightly from that given in Montgomery (2001, p. 497) which seems to be in error.

Figure 4 provides an overlaid contour plot of the mean and standard deviation responses. An examination of this plot reveals the approximately “optimal” (i.e., mean less than 30 and small standard deviation) pairs of mean and standard deviation solutions as (28.5, 6.5), (29.5, 5.5), and (30, 4.5).

**EJEMPLO 2: AMBAS VARIABLES DE CONTROL Y RUIDO**

La formulación propuesta del problema del DRS también puede ser aplicado para diseñar problemas en que las variables de control y de ruido se utilizaron en un arreglo combinado (Myers y Montgomery (1995, la p. 511)). El ejemplo siguiente es de una aplicación a la habilidad de elaboración de un semiconductor se toma de Montgomery (2001, pp. 497-500)<sup>3</sup>. Este ejemplo involucra un diseño de arreglo combinado con dos variables de control (x) y tres de ruido (z). El propósito del experimento fue encontrar las condiciones de operación que mantiene el proceso de la media debajo de 30 bajo variabilidad razonablemente pequeña. La superficie de respuesta establecida (para niveles de las variables de control y de ruido codificadas) es

$$\hat{y} = 30.37 - 2.92x_1 - 4.13x_2 + 2.60x_1^2 + 2.18x_2^2 + 2.87x_1x_2 + 2.73z_1 - 2.33z_2 + 2.33z_3 - 0.27x_1z_1 + 0.89x_1z_2 + 2.58x_1z_3 + 2.01x_2z_1 - 1.43x_2z_2 + 1.56x_2z_3$$

Desde el modelo de respuesta establecido, los modelos de la media y varianza son obtenidos (asumiendo que las variables de ruido son no-correlacionadas con cada una de las otras, con  $E(z_1) = E(z_2) = E(z_3) = 0$  y

$$\sigma_{z1}^2 = \sigma_{z2}^2 = \sigma_{z3}^2 = 1.0$$

como

$$\hat{\mu} = 30.37 - 2.92x_1 - 4.13x_2 + 2.60x_1^2 + 2.18x_2^2 + 2.87x_1x_2$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = 18.334 + 6.4012x_1 + 24.908x_2 + 7.5214x_1^2 + 8.5186x_2^2 + 4.4188x_1x_2$$

La función varianza fue obtenida usando el método de propagación de error (Lucas, 1994; Myers, Khuri y Vining, 1992) y también incluye la varianza de replicación (obtenida de los 3 puntos centrales). Incidentalmente, la anterior función varianza ligeramente difiere de la dada en Montgomery (2001, la pág., 497) qué parece estar en el error.

La Figura 4 proporciona un trazo de contorno recubierto de las respuestas media y desviación estándar. Un examen de este trazo revela aproximadamente el “óptimo” (es decir, menos de 30 y desviación estándar pequeña) como los pares de soluciones de media y desviación estándar (28.5, 6.5), (29.5, 5.5), and (30, 4.5).

<sup>3</sup> El diseño es una variante de 23 corridas, el cual se obtiene de un diseño de composición central (CCD) estándar para 5 factores (la fracción es un diseño  $2^{5-1}$ ), eliminando las corridas axiales que involucran las variables de ruido (nota del traductor)

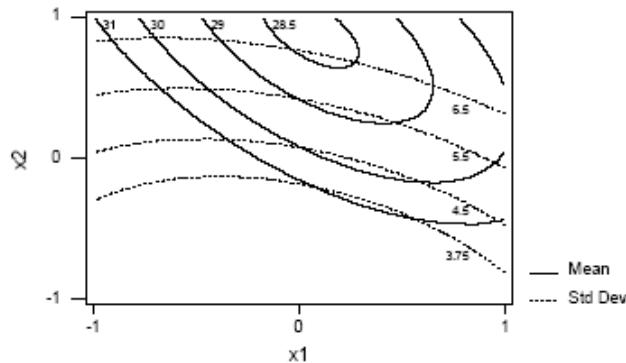


Figure 4 – Example 2: Overlaid Contour Plots for Mean and Standard Deviation

Table 7 summarizes the string of solutions obtained from the Solver in the Excel spreadsheet. In obtaining these solutions, we iteratively fixed the value of the mean response in the range between 28.5-31 and obtained the  $x_1$  and  $x_2$  values that minimized the variance response function. In this example, the solutions are the same under both spherical ( $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 1$ ) and cuboidal ( $-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2$ ) regions and are well within the design space of the experiment. These solutions are in good agreement with those determined from a visual examination of the contour plot in Figure 4.

$x_1$	$x_2$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
0.1478	0.6588	28.5	6.32
0.2490	0.2886	29.0	5.35
0.3092	-0.0830	30.0	4.35
0.3216	-0.3310	31.0	3.66

Table 7 – Example 2: Solutions that Minimize Standard Deviation ( $\hat{\sigma}$ ) Under a Fixed Value of the Mean Response ( $\hat{\mu}$ ).

Figure 5 displays the solutions graphically. This figure shows that the mean value can be set between 29-30 to yield a process standard deviation between 4.5 and 5.5. Setting the mean value below 29 should be avoided since the process tends to become highly non-robust as depicted by the steep increase in process standard deviation.

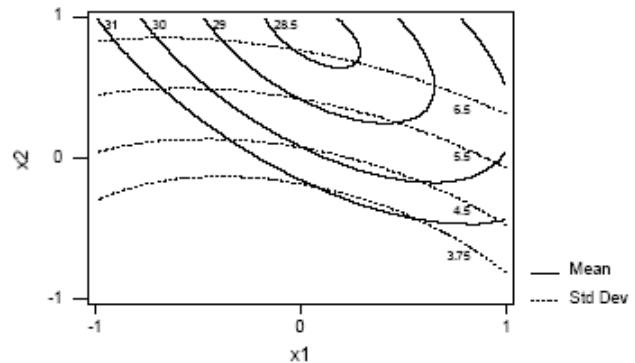


Figura 4 – Ejemplo 2: Trazos de contorno recubierto para la media y desviación estándar

La Tabla 7 resume la cadena de soluciones obtenidas del Solver en la hoja de cálculo del Excel. En la obtención de estas soluciones, fijamos iterativamente el valor de la respuesta media en el rango entre 28.5-31 y obtuvimos los valores de  $x_1$  y  $x_2$  que minimizan la función de respuesta varianza. En este ejemplo, las soluciones son las mismas bajo las regiones esférica ( $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 1$ ) y cuboidal ( $-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2$ ) y están bien dentro del espacio de diseño del experimento. Estas soluciones están en buen acuerdo con aquéllas determinadas desde un examen visual del trazo de contorno en la Figura 4.

$x_1$	$x_2$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
0.1478	0.6588	28.5	6.32
0.2490	0.2886	29.0	5.35
0.3092	-0.0830	30.0	4.35
0.3216	-0.3310	31.0	3.66

Tabla 7 – Ejemplo 2: Soluciones que minimizan la Desviación Estándar ( $\hat{\sigma}$ ) bajo un valor fijo de la respuesta Media ( $\hat{\mu}$ ).

La Figura 5 despliega gráficamente las soluciones. Esta figura muestra que el valor medio puede ser establecido entre 29-30 para rendir un proceso de la desviación estándar entre 4.5 y 5.5. Estableciendo el valor medio debajo de 29 deben ser evitados ya que el proceso tiende a ser muy no-robusto por los incrementos abruptos en el proceso de la desviación estándar.

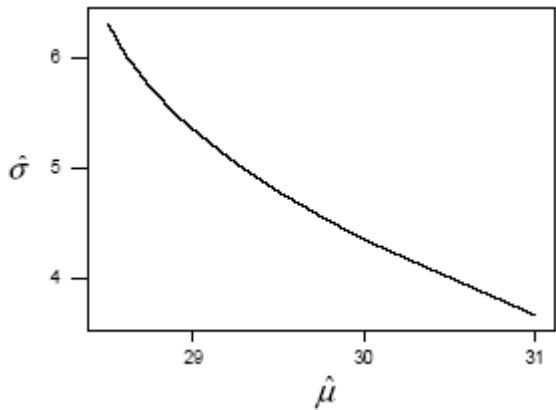


Figure 5 – Example 2: Pareto Optimal Solutions

#### EXAMPLE 3: BOTH CONTROL AND NOISE VARIABLES

The following example is taken Myers, Khuri, and Vining (1992). They presented a  $2^4$  factorial design with five center runs on two control (x) and two noise (z) variables. The purpose of the experiment was to find operating conditions that produced a large response value accompanied by reasonable variability. Both the control and noise variables are coded between -1 and 1. The fitted model is

$$\hat{y} = 24.472 + 6.89x_1 - 9.11x_2 + 4.94z_1 + 3.52x_1x_2 + 3.23x_1z_1 + 1.88x_1z_2$$

It is assumed that the noise variables are uncorrelated with each other and that  $E(z_1) = E(z_2) = 0$  and  $\sigma_{z1}^2 = \sigma_{z2}^2 = 1.0$ . This fitted model was used to generate a response surface model for the mean and for the process variance. The mean model is given by

$$\hat{\mu} = 24.472 + 6.89x_1 - 9.11x_2 + 3.52x_1x_2$$

and the fitted response surface for the variance (obtained by propagation of error) is

$$\hat{\sigma}^2 = 31.17 + 31.91x_1 + 13.96x_1^2$$

Table 8 summarizes the NIMBUS output. The variance of the response variable increases as  $x_1$  is increased while  $x_2 = -1$ . First two alternatives in Table 8 appear to be most desirable although the tenth alternative gives the highest mean value.

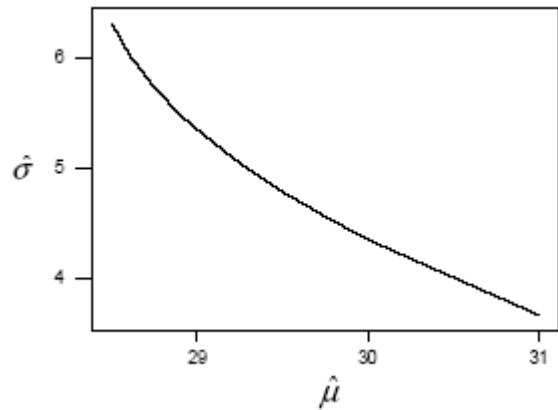


Figura 5 – Ejemplo 2: Soluciones óptimas Pareto

#### EJEMPLO 3: AMBAS VARIABLES DE CONTROL Y RUIDO

El siguiente ejemplo es tomado de Myers, Khuri, y Vining (1992). Ellos presentaron un diseño factorial  $2^4$  con cinco corridas centrales sobre dos variables de control (x) y dos variables de ruido (z). El propósito del experimento fue encontrar condiciones de operación que produzcan un valor de la respuesta grande acompañada por variabilidad razonable. Las variables de control y ruido están codificadas entre -1 y 1. El modelo establecido es

$$\hat{y} = 24.472 + 6.89x_1 - 9.11x_2 + 4.94z_1 + 3.52x_1x_2 + 3.23x_1z_1 + 1.88x_1z_2$$

Se asume que las variables de ruido son nocorrelacionadas entre sí y que  $E(z_1) = E(z_2) = 0$  y  $\sigma_{z1}^2 = \sigma_{z2}^2 = 1.0$ . Este modelo establecido fue utilizado para generar un modelo de superficie de respuesta para la media y para el proceso de varianza. El modelo medio está dado por

$$\hat{\mu} = 24.472 + 6.89x_1 - 9.11x_2 + 3.52x_1x_2$$

y la superficie de respuesta establecida para la varianza (obtenida por propagación de error POE) es

$$\hat{\sigma}^2 = 31.17 + 31.91x_1 + 13.96x_1^2$$

La Tabla 8 resume la salida NIMBUS. La varianza de la variable respuesta se incrementa cuando  $x_1$  es incrementada mientras  $x_2 = -1$ . Las primeras dos alternativas en la Tabla 8 parecen ser muy deseables aunque la alternativa décima da el valor medio más alto.

First Classification:			
Alternatives	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\mathbf{x}'$
1	31.83	18.34	(-0.5204, -1.0)
2	32.40	21.68	(-0.3515, -1.0)
3	32.97	25.81	(-0.1826, -1.0)
4	33.54	30.74	(-0.0136, -1.0)
5	34.11	36.46	( 0.1553, -1.0)
6	34.67	42.98	( 0.3242, -1.0)
7	35.24	50.30	( 0.4932, -1.0)
8	35.81	58.42	( 0.6621, -1.0)
9	36.38	67.33	( 0.8311, -1.0)
10	36.95	77.04	( 1.0, -1.0)

Table 8 – Example 3: Results for the “Larger the Better” Case (Cuboidal Region  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ )

A small value of  $x_2$  will be required in order to attain a low standard deviation. The mean response can be increased by setting  $x_1$  at a high value. Assuming that the target value for the mean response is about 33 is desired, Myers, Khuri, and Vining (1992) identified the most desirable operating conditions within the experimental region as  $x_2 = -1$  and  $-1 \leq x_1 \leq -0.3$ . Our findings support their conclusions. Figure 6 graphically displays the trade-offs between the mean and standard deviation responses.

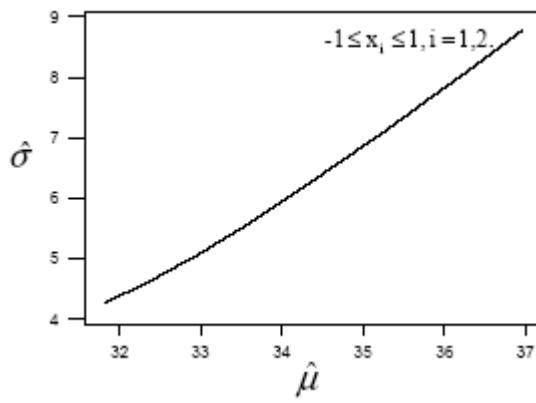


Figure 6 – Example 3: Pareto Optimal Solutions for the “Larger the Better” Case (Cuboidal Region  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ )

First Classification:			
Alternatives	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\mathbf{x}'$
1	31.83	18.34	(-0.5204, -1.0)
2	32.40	21.68	(-0.3515, -1.0)
3	32.97	25.81	(-0.1826, -1.0)
4	33.54	30.74	(-0.0136, -1.0)
5	34.11	36.46	( 0.1553, -1.0)
6	34.67	42.98	( 0.3242, -1.0)
7	35.24	50.30	( 0.4932, -1.0)
8	35.81	58.42	( 0.6621, -1.0)
9	36.38	67.33	( 0.8311, -1.0)
10	36.95	77.04	( 1.0, -1.0)

Tabla 8 – Ejemplo 3: Resultados para el caso “Más grande el mejor” (Región Cuboidal  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ )

Un valor pequeño de  $x_2$  será requerido para lograr una desviación estándar baja. La respuesta media puede ser incrementada estableciendo un valor alto a  $x_1$ . Asumiendo que es deseable el valor objetivo para la respuesta media aproximadamente 33, Myers, Khuri, y Vining (1992) identificaron las condiciones de operación más deseables dentro de la región experimental como  $x_2 = -1$  y  $-1 \leq x_1 \leq -0.3$ . Nuestros resultados soportan sus conclusiones. La Figura 6 despliega gráficamente los intercambios entre las respuestas media y desviación estándar.

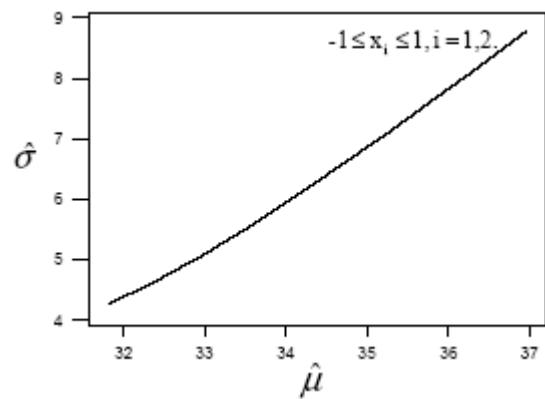


Figura 6 – Ejemplo 3: Soluciones óptimas Pareto para el caso “Más grande el mejor” (Región Cuboidal  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ )

## Summary

In the spirit of Taguchi's RPD one should simultaneously examine and optimize the response mean and the standard deviation. This is in contrast to the current common practice of optimizing the mean, subject to keeping the standard deviation below a specified value. This paper presents an alternative formulation of the DRS problem that yields a string of solutions and facilitates graphical exploration of the trade-offs between the mean and standard deviation responses. It is insightful to examine graphically how the controllable variables simultaneously impact the mean and standard deviation. The proposed approach is an important complement to the earlier formulations of the DRS problem that seek a unique optimum solution in a "single shot". Related topics that warrant further study are the case of multiple correlated properties (Vining, 1998 and Chio and Hamada, 2001) and incorporating estimation uncertainty.

## Acknowledgements

The authors are grateful to Martha Gardner, Gerry Hahn, Gülsüm Hocaoglu, Zehra Muluk, Chris Stanard, and the two anonymous referees for their very helpful comments that contributed significantly to the improvement of this paper.

## Appendix

The use of the Solver in the Excel spreadsheet and the NIMBUS algorithm to implement the proposed approach are described in the Appendix.

### A1: Use of the Solver in the Excel Spreadsheet

Figure A1 displays the Excel spreadsheet that can be used to obtain the solutions presented for Example 1 of the paper. In this figure, the boxed items correspond to the formulas entered in the designated cells. The starting solution is  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . The cells B7 and B8 display the values of the mean and standard deviation response functions respectively at the starting solution.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		VARIABLES			Spherical Region		Cuboidal Region			
2	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$		$x=$	0.0000				
3	0.0000	0.0000	0.0000							
4										
5										
6		RESPONSE SURFACES								
7	mean=	327.6000				=327.6+177*A3 + 109.4*B3 + 131.5*C3 + 32*A3^A3 - 22.4*B3*B3				
8	std dev=	34.9000				- 29.1*C3*C3 + 66 *A3*B3 + 75.5*A3*C3 + 43.6*B3*C3				
9										
10										
11										
12										

Figure A1 – Setting up the Cells in the Excel Spreadsheet

## Resumen

En el espíritu del RPD de Taguchi uno debe examinar y optimizar simultáneamente la respuesta de la media y la desviación estándar. Esto está en contraste con la práctica común actual de optimización de la media, sujeta a mantener la desviación estándar debajo de un valor especificado. Este trabajo presenta una formulación alternativa del problema del DRS que rinde una cadena de soluciones y facilita la exploración gráfica de los intercambios entre las respuestas media y desviación estándar. Es profundo examinar gráficamente cómo las variables controlables impactan simultáneamente la media y la desviación estándar. El acercamiento propuesto es un complemento importante a las formulaciones más recientes del problema del DRS que busca una solución óptima única en un "solo tiro". Los tópicos relacionados que garantizan estudio posterior es el caso de propiedades correlacionadas múltiple (Vining, 1998 y Chio&Hamada, 2001) y la incorporación de estimación de incertidumbre.

## Reconocimientos

Los autores agradecen a Martha Gardner, Gerry Hahn, Gülsüm Hocaoglu, Zehra Muluk, Chris Stanard, y los dos árbitros anónimos por sus comentarios muy útiles que contribuyeron significativamente a la mejora de este trabajo.

## Apéndice

El uso del Solver en la hoja de trabajo Excel y el algoritmo NIMBUS para implementar el acercamiento propuesto son descritos en el Apéndice.

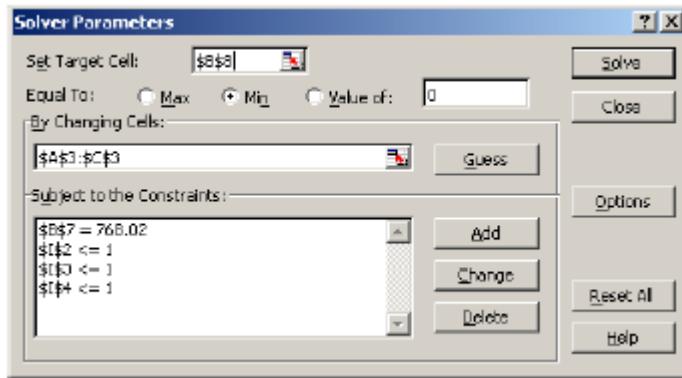
### A1: Uso del Solver en la hoja de cálculo Excel

La Figura A1 despliega la hoja de cálculo Excel que puede ser utilizada para obtener las soluciones presentadas para Ejemplo 1 del trabajo. En esta figura, los cuadros de comentarios corresponden a las fórmulas introducidas en las celdas designadas. La solución inicial es:  $x_1=x_2=x_3=0$ . Las celdas B7 y B8 despliegan los valores de funciones respuesta de media y desviación estándar respectivamente en la solución inicial.

Figura A1 – Estableciendo las celdas en la hoja de cálculo Excel

### MINIMUM STANDARD DEVIATION AT A GIVEN VALUE OF MEAN – CUBOIDAL REGION

### DESVIACIÓN ESTÁNDAR MÍNIMA A UN VALOR DADO DE MEDIA – REGIÓN CUBOIDAL



For mean fixed at 768.02 (entered in the constraint box of the Solver) and the cuboidal region,  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i=1,2,3$ , (also entered in the constraint box) the Solver obtains the minimum standard deviation as 89.82 (displayed in the spreadsheet cell B8) at  $x_1 = 1.0$ ,  $x_2 = 1.0$ ,  $x_3 = 0.3252$  (displayed in the spreadsheet cells A3, A4, A5 respectively). This solution corresponds to Alternative 7 of the First Classification in Table 4 which was obtained by NIMBUS. The entire Table 4 can be generated in the manner described here by iteratively changing the value of the mean response in the constraint box. The solutions in Table 4 were actually obtained from NIMBUS and some of the solutions may slightly differ from those from the Solver in Excel.

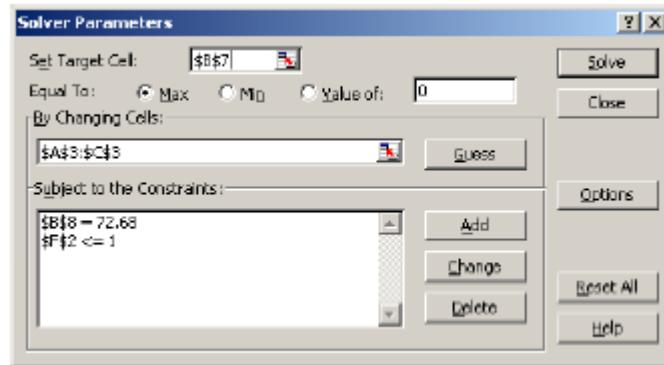
For this example, an alternative approach is to maximize the mean response at a set value of standard deviation. We will illustrate this approach next assuming a spherical region.

### MAXIMUM MEAN AT A GIVEN VALUE OF STANDARD DEVIATION – SPHERICAL REGION

Para la media fijada a 768.02 (introducida en la caja de restricciones del Solver) y la región cuboidal,  $-1 \leq x_i \leq 1$ ,  $i=1,2,3$ , (introducida también en la caja de restricciones) el Solver obtiene la desviación estándar mínima como 89.82 (desplegada en la celda B8 de la hoja de cálculo) a  $x_1=1.0$ ,  $x_2=1.0$ ,  $x_3=0.3252$  (desplegadas en las celdas A3, A4, A5 respectivamente). Esta solución corresponde a la Alternativa 7 de la primera clasificación en Tabla 4 la cual fue obtenida por NIMBUS. La Tabla 4 completa puede generarse en la manera aquí descrita cambiando el valor de respuesta media en caja de restricciones iterativamente. Las soluciones en la Tabla 4 fueron obtenidas realmente desde NIMBUS y algunas de las soluciones pueden diferir ligeramente del Solver en Excel.

Para este ejemplo, un acercamiento alternativo es maximizar la respuesta media a un valor establecido de la desviación estándar. Ilustraremos este acercamiento asumiendo una región esférica.

### MEDIA MÁXIMA A UN VALOR DADO DE DESVIACIÓN ESTÁNDAR – REGIÓN ESFÉRICA



For the set value of standard deviation 72.68 (specified in the constraint box) and the spherical region  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 1$  (in the constraint box) the maximum mean is obtained as 635.26 (displayed in cell B7) at  $x_1=0.8367$ ,  $x_2=0.4081$ ,  $x_3=0.3652$  (displayed in cells A3, A4, A5 respectively). This solution corresponds to the Alternative 14 of the First Classification of NIMBUS in Table 5.

## A2: The NIMBUS Algorithm and Software

The NIMBUS (Miettinen, 1999) software can be accessed at <http://nimbus.mit.jyu.fi/>. The formulation in (3) is a nonlinear multiobjective programming (NLMOP) problem since the objective functions are usually nonlinear. There are a wide variety of NLMOP methods available for solving these types of problems. The NIMBUS software automatically generates a string of Pareto optimal solutions and enables the decision-maker to incorporate her preferences in an interactive and speedy manner. This feature makes NIMBUS highly attractive for the type of applications considered in this paper.

The NIMBUS algorithm is appropriate for both differentiable and nondifferentiable NLMOP problems subject to nonlinear and linear constraints with bounds for the variables. Even though highly nonlinear functions are not commonly used in response surface studies, the restriction on the full second-order models for the objective functions may be unrealistic in some situations. In its original form, the NIMBUS software can be used for minimization problems only. If the objective function  $f$  is to be maximized, however, this can be accomplished by minimizing  $-f$ . Unlike some other classification-based methods, not all the objective functions have to be classified. For example, the decision-maker can set some objective functions free in order to examine the changes in the other objective functions. The interaction phase of the algorithm is simple and easy to understand. The decision-maker moves around the Pareto optimal set until she finds the most preferred alternative. Global optimality, however, cannot be guaranteed.

A detailed description of NIMBUS is presented in Miettinen (1999, 198-200). The flowchart in Figure A2 shows the basic steps of interactive algorithms. Some heuristic insights into the method will be given below:

Para el valor establecido de la desviación estándar 72.68 (especificado en la caja de restricción) y la región esférica  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq 1$  (en la caja de restricción) la media máxima es obtenida como 635.26 (desplegada en celda B7) a  $x_1=0.8367$ ,  $x_2=0.4081$ ,  $x_3=0.3652$  (desplegadas en celdas A3, A4, A5 respectivamente). Esta solución corresponde a la alternativa 14 de la primera clasificación de NIMBUS en la Tabla 5.

## A2: El Algoritmo y Software NIMBUS

El software NIMBUS (Miettinen, 1999) puede accederse en <http://nimbus.mit.jyu.fi/>. La formulación en (3a) o (3b) es un problema de programación multiobjetivo no lineal (NLMOP) ya que las funciones objetivo normalmente son no lineales. Hay una variedad amplia de métodos NLMOP disponibles para resolver estos tipos de problemas. El software NIMBUS genera automáticamente una cadena de soluciones óptimas Pareto y habilita la toma de decisiones para incorporar sus preferencias en una manera interactiva y rápida. Esta característica hace al NIMBUS muy atractivo para el tipo de aplicaciones consideradas en este trabajo.

El algoritmo NIMBUS es apropiado para problemas diferenciables y no diferenciables NLMOP sujetos a restricciones lineales y no lineales con límites para las variables. Aunque funciones altamente no lineales no son utilizadas usualmente en estudios de superficie de respuesta, la restricción en los modelos de segundo orden completos para las funciones objetivo pueden ser poco realistas en algunas situaciones. En su forma original, el software NIMBUS sólo puede utilizarse en problemas de minimización. Si la función objetivo  $f$  será maximizada, no obstante, esto puede lograrse minimizando  $-f$ . Al contrario de algunos otros métodos basados en clasificación, no todas las funciones objetivo tienen que ser clasificadas. Por ejemplo, la toma de decisión puede establecer algunas funciones objetivo libres para examinar los cambios en las otras funciones objetivo. La fase de interacción del algoritmo es simple y de fácil comprender. La toma de decisiones se mueve alrededor del conjunto óptimo Pareto hasta que ella encuentra la alternativa más preferida. La optimidad global, sin embargo, no puede ser garantizada.

Una descripción detallada de NIMBUS se presenta en Miettinen (1999, 198-200). El diagrama de flujo en la Figura A2 muestra los pasos básicos de los algoritmos interactivos. Algunas visiones heurísticas en el método serán dadas a continuación:

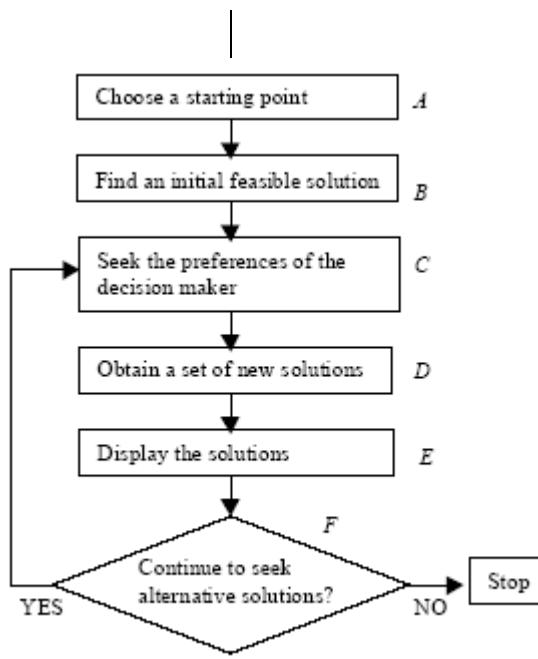


Figure A2 – Basic Steps of the NIMBUS algorithm

A: A feasible starting point is needed to begin the NIMBUS algorithm. The “best” Pareto optimal solution is not guaranteed if the starting point is far from optimal. Contour plots such as those displayed on Figure 1 can be used to identify good starting points. In response surface studies, the origin ( $x_1=0, x_2=0, \dots, x_k=0$ ) often provides a feasible solution.

B: NIMBUS uses the subroutine MPB (Multiobjective Proximal Bundle) to generate Pareto optimal solutions (Miettinen, 1999). For example, in Table 4 the first Pareto optimal solution is mean = 396.30 and standard deviation = 32.91 (i.e., the first alternative solution of the first classification). MPB seeks a direction of movement that will improve the values of all the objective functions simultaneously. Because MPB involves random starting points, one would often obtain a slightly different Pareto optimal solution at different runs of the program. The general patterns in the string of solutions such as those displayed on Figure 2, however, will remain the same.

C: Following the initial feasible solution the decision-maker will be asked to classify the objective functions in order to guide the algorithm in the desired direction. For each response function, one can select from one of the following classes:

Figura A2 – Pasos básicos del algoritmo NIMBUS

A: Un punto de partida factible se necesita para empezar el algoritmo NIMBUS. La solución óptima Pareto “mejor” no se garantiza si el punto de partida está lejos del óptimo. Pueden utilizarse para identificar puntos de partida buenos los trazos de contorno tales como los desplegados en la Figura 1. En estudios de superficie de respuesta, el origen ( $x_1=0, x_2=0, \dots, x_k=0$ ) a menudo proporciona una solución factible.

B: NIMBUS utiliza la subrutina MPB (Multiobjetive Proximal Bundle) para generar soluciones óptimas Pareto (Miettinen, 1999). Por ejemplo, en la Tabla 4 la primera solución óptima Pareto es media = 396.30 y la desviación estándar = 32.91 (es decir, la primera solución alternativa de la primera clasificación). MPB busca una dirección de movimiento que mejorará los valores de todas las funciones objetivo simultáneamente. Porque MPB involucra puntos de partida aleatorios, a menudo uno obtendría soluciones óptimas Pareto ligeramente diferentes a corridas diferentes del programa. Los modelos generales en la cadena de soluciones como aquéllos desplegados en la Figura 2, sin embargo, permanecerán iguales.

C: Siguiendo la solución factible inicial la toma de decisión pedirá clasificar las funciones objetivo para guiar el algoritmo en la dirección deseada. Para cada función respuesta, uno puede seleccionar desde una de las clases siguientes:

1. should be minimized ( $<$ ),
2. should be minimized until some specified lower bound is reached ( $\leq$ ),
3. are satisfactory at the moment ( $=$ ),
4. are allowed to increase until some specified upper bound is reached ( $\geq$ ),
5. are allowed to change freely ( $<>$ ).

If the second or the fourth option is selected, the decision-maker is asked to specify the lower and the upper bounds for the function values, respectively. When both responses are to be minimized, one should be cautious about using the first two options for both responses. Often, one must be willing to sacrifice from one of the objectives in order to improve the values of the other objective function. Based on initial solution in Table 4, we picked option 1 for the mean response function (note that this actually seeks to increase the value of the mean response since we used  $-\hat{\mu}$ ) and option 5 for the standard deviation response function.

D: Following the classification the original NLMOP problem is converted to a subproblem. This subproblem will be the form of either a single objective optimization problem or a new multiobjective optimization problem, called scalar and vector subproblems (Miettinen, 1999, 197-198). One of the two alternative subproblems can be solved by either any method for nondifferentiable single objective optimization (Mäkelä and Neittaanmäki, 1992, 112-137) or the MPB subroutine. Then, a new solution (or a set of new solutions) will be generated. In Table 4, for example, the alternative solutions under the first classification were obtained in this manner.

E: The decision-maker compares the old and the new solutions. Recall that the old solution is produced by using the starting point, and it was the basis of the first classification. The NIMBUS algorithm also facilitates intermediate solutions between the old and the new solution in an interactive manner.

F: If the decision-maker is not satisfied with the solutions from the first classification, she will pick a reasonable solution among them to obtain the second classification. In Table 4, the fifth alternative of the first classification was used as a basis to generate the second classification that sought to achieve a standard deviation value of 60.

1. debe ser minimizado ( $<$ ),
2. debe ser minimizado hasta que algún límite bajo especificado es alcanzado ( $\leq$ ),
3. es satisfactorio en el momento ( $=$ ),
4. es permitido incrementar hasta que algún límite alto especificado es alcanzado ( $\geq$ ),
5. es permitido cambiar libremente ( $<>$ ).

Si la segunda o la cuarta opción se selecciona, en la toma de decisión se pide especificar los límites más bajo y más alto para los valores de la función, respectivamente. Cuando ambas respuestas están siendo minimizadas, uno debe ser cauto sobre el uso de las dos primeras opciones para ambas respuestas. A menudo, debe estar deseoso en sacrificar uno de los objetivos para mejorar los valores de la otra función objetivo. Basado en la solución inicial en Tabla 4, escogimos opción 1 para la función respuesta media (notar que esto realmente busca aumentar el valor de la respuesta media ya que utilizamos  $-\hat{\mu}$ ) y la opción 5 para la función respuesta desviación estándar.

D: Siguiendo la clasificación, el problema original NLMOP es convertido a un sub-problema. Este subproblema será de la forma, o problema de optimización de objetivo simple o un nuevo problema de optimización multiobjetivo, llamados subproblemas escalar y vectorial (Miettinen, 1999, 197-198). Uno de los dos sub-problemas alternativos puede ser resuelto por cualquier método para optimización de objetivo simple no diferenciable (Mäkelä y Neittaanmäki, 1992, 112-137) o por subrutina MPB. Entonces, una solución nueva (o un conjunto de soluciones nuevas) será generada. En la Tabla 4, por ejemplo, las soluciones alternativas bajo la primera clasificación fueron obtenidas en esta manera.

E: La toma de decisiones compara las soluciones anterior y nueva. Recordar que la solución anterior se produce usando el punto de partida, y era la base de la primera clasificación. El algoritmo NIMBUS también facilita las soluciones intermedias entre la solución anterior y nueva en una manera interactiva.

F: Si la toma de decisiones no está satisfecha con las soluciones de la primera clasificación, ella escogerá una solución razonable para obtener la segunda clasificación. En la Tabla 4, la alternativa quinta de la primera clasificación se usó como base para generar la segunda clasificación que se requirió para lograr un valor de desviación estándar de 60.

## References

- Box, G.E.P. and Draper, N.R. (1987). Empirical Model-Building and Response Surfaces, John Wiley & Sons, New York, NY.
- Carlyle, W.M., Montgomery, D.C. and Runger, G.C. (2000). "Optimization Problems and Methods in Quality Control and Improvement". *Journal of Quality Technology* 32, pp. 1–31.
- Chiao, C. and Hamada, M. (2001). "Analyzing Experiments with Correlated Multiple Responses". *Journal of Quality Technology* 33, pp. 451–465.
- Copeland, K. A. and Nelson, P. R. (1996). "Dual Response Optimization via Direct Function Minimization". *Journal of Quality Technology* 28, pp. 331–336.
- Del Castillo, E. and Montgomery, D.C. (1993). "A Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem". *Journal of Quality Technology* 25, pp. 199–204.
- Del Castillo, E., Fan, S. K. and Semple, J. (1977). "Computation of Global Optima in Dual Response Systems". *Journal of Quality Technology* 29, pp. 347-353.
- Draper, N.R. (1963). "Ridge Analysis of Response Surfaces". *Technometrics* 5, pp. 469-479.
- Fan, S. K. S. (2000). "A Generalized Global Optimization Algorithm for Dual Response Systems". *Journal of Quality Technology* 32, pp. 444-456.
- Hoerl, A. E. (1959). "Optimum Solution of Many Variables Equations". *Chemical Engineering Progress* 55, pp.69.
- Khuri, A.I. (1996). Multiresponse Surface Methodology, Handbook of Statistics, S. Ghosh and C. R. Rao, eds., Vol. 13, pp. 377-406.
- Kim, K. and Lin, D. K. J. (1998). "Dual Response Surface Optimization: A Fuzzy Modeling Approach". *Journal of Quality Technology* 30, pp. 1-10.
- Kim, Y. J. and Cho, B. R. (2002). "Development of Priority-Based Robust Design". *Quality Engineering* 14, pp. 355-363.
- Lin, D.K.J. and Tu, W. (1995). "Dual Response Surface Optimization". *Journal of Quality Technology* 27, pp. 34–39.
- Lucas, J. M. (1994). "How to Achieve a Robust Process Using Response Surface Methodology". *Journal of Quality Technology* 26, pp. 248-260.
- Mäkelä, M.M. and Neittaanmäki, P. (1992). "Nonsmooth Optimization: Analysis and Algorithms with Applications to Optimal Control", World Scientific Publishing Co., Singapore.
- Miettinen, K. (1999). "Nonlinear Multiobjective Optimization", Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts.
- Montgomery, D. C. (2001). "Design and Analysis of Experiments", 5th Ed., John Wiley & Sons, New York.
- Myers, R.H. and Carter, W.H. (1973). "Response Surface Techniques for Dual Response Systems". *Technometrics* 15, pp. 301–317.
- Myers, R.H. and Montgomery, D.C. (1995). "Response Surface Methodology", John Wiley & Sons, New York.
- Myers, R.H., Khuri, A.I. and Vining, G.G. (1992). "Response Surface Alternatives to the Taguchi Robust Parameter Design Approach". *The American Statistician* 46, pp. 131–139.
- Nelder, J. A. and Mead, R. (1965). "A Simplex Method for Function Minimization". *The Computer Journal* 7, pp. 3068-313.
- Tang, L. C. and Xu, K. (to appear). "A Unified Approach for Dual Response Surface Optimization". *Journal of Quality Technology*.
- Vining, G. G. (1998). "A Compromise Approach to Multiresponse Optimization". *Journal of Quality Technology* 30, pp. 309-313.
- Vining, G.G. and Myers, R.H. (1990). "Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach". *Journal of Quality Technology* 22, pp. 38–45.

Onur Köksoy  
Necip Doganaksoy

Simultaneous Optimization of Mean and Standard Deviation in  
Response Surface Experimentation

2002GRC247  
November 2002